

單因子變異數分析與多重比較法

簡 茂 發

一、變異數分析的性質與功能

變異數分析 (Analysis of Variance, 簡稱 ANOVA) 為 R.A.Fisher 於 1923 年所創用, 係一種基於 F 分配 (F-distributions) 而與實驗設計密切結合的統計方法。該法最初應用於農業試驗結果之分析, 後來逐漸推廣至其他科學的研究領域, 目前在心理學與教育研究方面採用此一方法以處理資料者相當普遍。在行為科學研究中最常見的統計假設為「平均數相等」, t 檢定 (t test) 為考驗兩組平均數差異顯著性的有效方法, 但若有兩組以上的平均數, 固然仍可兩兩加以比較, 不過所需比較的次數隨組數而遞增, 且真實的虛無假設被拒斥之機率會大於事先預定的顯著水準 (level of significance), 此時如用變異數分析, 則所有各組平均數之間的差異是否顯著, 可同時一次加以考驗, 更符合經濟實用的要求。從統計觀點而言, 變異數分析之應用的主要長處可歸納如下:

- (一) 在 t 檢定中, 每次祇比較兩組平均數, 亦即祇用兩組樣本的資料以推估母群體的母數 (parameters) ; 而變異數分析由於同時把多組平均數加以比較, 等於根據多組樣本的資料以推估母群體的母數, 故其數值較為穩定。
- (二) 假若有七組平均數, 經由 t 檢定的結果, 在二十一個 (7C_2) 差量中, 即使有一個達到顯著水準, 但仍無法認定其平均數之間確有顯著差異, 蓋因僅憑機遇已有此可能性; 而變異數分析由於把所有各組平均數同時一次比較, 故無此種推論上的困擾。
- (三) 變異數分析可以分離外擾因素 (extraneous factors) 之變異, 而將其剔出, 且經由適當的實驗設計可進而探討兩種以上自變數 (independent variables) 之間的交互作用 (interaction) 對依變數 (dependent variable) 所造成的影響。

二、變異數分析的原理

變異數分析的主旨在於分析一種依變數的變異來源, 將總變異分割成若干部份, 以測定不同來源的變異量之大小。變異的來源可分為兩方面: 其一為已知原因之變異, 亦即可歸之於自變數者; 另一為抽樣誤差及其他未知原因之影響而產生的變異。在單因子變異數分析中, 前者為組間變異, 以「組間平方和」 (between-group sum of squares, 簡稱 SS_b) 表示之; 後者為組內變異, 以「組內平方和」 (within-group sum of squares, 簡稱 SS_w) 表示之; 兩者相加便是總變異, 以「總平方和」 (total sum of squares, 簡稱 SS_t) 表示之。亦即:

$$\text{總變異} = \text{組間變異} + \text{組內變異}$$

其公式如下：

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2$$

「組間平方和」與「組內平方和」分別除以其自由度 (degrees of freedom)，即得「組間均方」 (the mean square between，簡稱 MSb) 與「組內均方」 (the mean square within，簡稱 MSw)，作為組間變異數 (between-group variance) 與組內變異數 (within-group variance) 的不偏估計值 (unbiased estimates)，進而將「組間均方」除侍「組內均方」，則得一 F 比值 (F-ratio)，其自由度為 K-1， N-K。

變異數分析為一種母數統計法 (parametric statistical method)，有其數理上的基本假定 (assumptions) 和運用上的限制。一般言之，變異數分析必須滿足下列三項假定，其所求得的 F 比值始可適用 F 分配，基於理論抽樣分配的機率原理，進行統計假設之檢定。

1. 所有資料均係由母群體隨機抽樣而得。
2. 各組樣本必須取自常態分配且變異數相等的母群體。
3. 各組樣本應彼此獨立，不相關聯。

在上述的假定中，隨機抽樣及樣本相互獨立兩項，如能在抽樣時詳加計劃和嚴密控制，大致可以做到；至於母群體常態分配及變異數相等的假定，統計學者研究發現變異數分析對此非常強韌，祇要不嚴重違反假定，其影響相當輕微。(Ferguson, 1976 ; Glass & Stanley, 1970 ; Guilford & Fruchter, 1978 ; Hays, 1973 ; Roscoe, 1969)。

三、單因子變異數分析的實例

當我們僅探討一個自變數和一個依變數的關聯之問題時，通常可採用單純隨機實驗設計 (simple randomized experimental design)，以自變數為分類標準，分為 k 組，予以不同的實驗處理 (experimental treatments)，然後再就各組隨機樣本在依變數上的表現加以測定，據以進行變異數分析。

表一所列為單因子變異數分析資料的符號。一共有 k 組隨機樣本，本其個數分別為 n_1 、 n_2 …… n_j …… n_k ，總數為 N。 X_{ij} 表示第 j 組中的第 i 個變量， $\sum X_{.j}$ 表示第 j 組樣本變量之總和， $\bar{X}_{.j}$ 表示第 j 組樣本平均數。 $\sum X_{..}$ 和 $\bar{X}_{..}$ 分別表示全體樣本變量之總和與平均數。

表一 單因子變異數分析資料的符號

組 別	1	2	……	j	……	k	合 計
各 組 變 量	X_{11}	X_{12}	……	X_{1j}		X_{1k}	
	X_{21}	X_{22}	……	X_{2j}		X_{2k}	
	⋮	⋮		⋮		⋮	
	$X_{n_{11}}$	$X_{n_{22}}$	……	$X_{n_{1j}}$		$X_{n_{k k}}$	
個 數	n_1	n_2	……	n_j	……	n_k	N
和	$\sum X_{.1}$	$\sum X_{.2}$	……	$\sum X_{.j}$	……	$\sum X_{.k}$	$\sum X_{..}$
平均數	$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.2}$	……	$\bar{X}_{.j}$	……	$\bar{X}_{.k}$	$\bar{X}_{..}$

各組樣本所代表的母群體之平均數為 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots, \mu_k$ ，全母群體之平均數為 μ ，則每一個變量可用下列直線性模式表示之：

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \epsilon_{ij}$$

式中 μ 為與組別無關的常數； α_j 為因組別而異之數值，亦即由於不同實驗處理而產生之差異數值； ϵ_{ij} 為由於抽樣或其他未知因素所產之誤差。

因此，單因子變異數分析的虛無假 (null hypothesis) 和對立假設 (alternative hypothesis) 可列式陳述如下：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k ; \quad \text{或} \quad H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 ;$$

$$H_1 : \text{至少有一平均數不相等。} \quad H_1 : \text{至少有一 } \alpha_i \text{ 不等於零。}$$

檢定方法以「組間均方」和「組內均方」之 F 比值的大小為斷。

假若某一教育研究者想了解四種不同教學法在小高年級數學課程的適用性，乃以隨機抽樣的方式取國小五年級學生 48 名，並隨機分派為四組，每組 12 名學生，分別採用講解法、討論法、編序教學法和發現式教學法施教，經過一年的教學實驗後，以經過標準化的數學科成就測驗考查教學成果，各組學生的測驗分數如表二所示。

表二 四種教學法教學成果之比較

組 別	I 講解法	II 討論法	III 編序教學法	IV 發現式教學法	全 體
測 驗 分 數	10 8	3 12	19 13	23 16	
	7 9	8 4	12 10	14 17	
	9 11	7 7	16 19	16 19	
	8 9	5 6	14 9	18 14	
	15 5	6 5	7 15	12 16	
	3 17	10 15	8 14	13 17	
n_j	12	12	12	12	N = 48
ΣX	111	88	156	195	550
ΣX^2	1189	778	2202	3265	7434

根據表二的資料，可求得各組的平均數與標準差如表三：

表三 四種教學法教學成果之平均數與標準差

組別	I 講解法	II 討論法	III 編序教學法	IV 發現式教學法	全體
\bar{X}	9.25	7.33	13.00	16.25	11.46
s	3.84	3.47	3.98	2.96	4.91

為比較四種不同的教學法之教學效果，必須從四組學生的測驗分數之平均數有無顯著的差異加以探討，可提出假設如下：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

H_1 : 至少有兩組平均數是不相等的。

然後根據表二和表三的基本統計資料，進行變異數分析，其序包括下列七個步驟：

1. 求 SS_t

SS_t 是 48 個分數與總平均數 (grand mean) 11.46 之差的平方和，可從下面兩個公式求得：

$$\begin{aligned} SS_t &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{(\sum X_{..})^2}{N} \\ &= 7434 - \frac{(550)^2}{48} = 1131.92 \end{aligned}$$

$$SS_t = (N - 1)S^2 = (48 - 1)(4.91)^2 = 1133.08$$

2. 求 SS_w

SS_w 是各組分數與其平均數之差的平方和累加的總和，可從下面兩個公式求得：

$$\begin{aligned} SS_w &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \sum_{j=1}^k \frac{(\sum X_j)^2}{n_j} \\ &= 7434 - \left[\frac{(111)^2}{12} + \frac{(88)^2}{12} + \frac{(156)^2}{12} + \frac{(195)^2}{12} \right] \\ &= 565.17 \end{aligned}$$

$$SS_w = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2$$

$$\begin{aligned} &= (12 - 1)(3.84)^2 + (12 - 1)(3.47)^2 + (12 - 1)(3.98)^2 + (12 - 1)(2.96)^2 \\ &= 565.27 \end{aligned}$$

3. SS_b

SS_b 是各組平均數與總平均數之差的平方乘以各組人數所得之積的總和，可從下面公式求得：

$$SS_b = \sum_{j=1}^k (n_j \bar{X}_j - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(\sum X_j)^2}{n_j} - \frac{(\sum X_{..})^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(111)^2}{12} + \frac{(88)^2}{12} + \frac{(156)^2}{12} + \frac{(195)^2}{12} \right] - \frac{(550)^2}{48} = 566.75$$

$$SS_b = SS_t - SS_w = 1133.08 - 565.27 = 567.81$$

4. 求自由度

SS_t 由 $N = 48$ 個分數所造成，以總平均數為基準，失去一個自由度，故 $df_t = N - 1 = 47$ ； SS_w 由各組 12 個分數所共同造成，各組皆以其平均數為基準，各失去一個自由度，故 $df_w = k(n_j - 1) = N - k = 44$ ； SS_b 由 $k = 4$ 個平均數所造成，以總平均數為基準，失去一個自由度，故 $df_b = k - 1 = 3$ 。三者之間的關係是： $df_t = df_b + df_w$ 。

5. 求 MS_b 及 MS_w

$$MS_b = \frac{SS_b}{df_b} = \frac{566.75}{3} = 188.92$$

$$MS_w = \frac{SS_w}{df_w} = \frac{565.17}{44} = 12.84$$

6. 求 F 值

F 值是組間變異數與組內變異數之比，亦即：

$$F = \frac{MS_b}{MS_w} = \frac{188.92}{12.84} = 14.71$$

7. 判斷假設是否成立，作成結論：

查 F 分配表（見附錄 Table A），得 $_{.95}F_{3,44} = 2.82$ ， $_{.99}F_{3,44} = 4.26$ ，因 $F = 14.71 > 4.26$ ，所以 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ 應被推翻，由此可知四種教學法的教學效果並非完全相等，亦即四種教學法之間的差異達到 .01 顯著水準。

以上所述為變異數分析的計算過程，通常在學術研究報告中，須將其要點加以歸納整理，呈現於「變異數分析摘要表」（summary of analysis of variance）上，如表四：

表四 四種教學法實驗結果變異數分析摘要表

變異來源 (Source)	離均差平方和 (SS)	自由度 (df)	均方 (MS)	F
組間	566.75	3	188.92	14.71**
組內	565.17	44	12.84	—
總和	1131.92	47	—	—

** $p < .01$

四、多重比較

當變異數分析的結果 F 值達顯著水準時，推翻了平均數相等的虛無假設，亦即表示至少有兩組平均數之間有顯著差異存在。如果各組樣本個數皆相等，則其中最大的平均數必定顯著地有異於最小的平均數；但若各組樣本個數不等，則未必如此，何況研究者仍想知道其他各組平均數相互之間是否也有顯著的差異存在。因此，推翻平均數相等的虛無假設之後，必須進行事後的多重比較 (*posteriori multiple comparisons*)，以考驗各組平均數相互之間的差異顯著性。

多重比較的方法和程序仍為統計學者所爭論不已的問題，至今尚未獲致簡易有效的解決途徑。目前已有幾種可供多重比較的方法發展出來，不過仍有其缺點和限制。在變異數分析保留虛無假設的情形下，有些多重比較法卻得到顯著差異的結果；在變異數分析拒斥虛無假設情下，另有一些多重比較法卻能得到差異不顯著的結果。凡此皆與多重比較法的數理特性及其檢定力 (*power of test*) 有關。茲就幾種主要的多重比較法舉例說明於下：

(一) 杜納德法 (*Dunnett Method*)

C.W. Dunnett 於 1955 年發展出一種適用於實驗組與單一控制組相比較的方法，基於 t 統計量的抽樣分配 (*the sampling distribution for a t statistic*)，以檢定 $k-1$ 個實驗組的平均數與控制組的平均數之間的差異顯著性，屬於非正交比較 (*nonorthogonal comparison*)。如以前述四種教學法教學效果變異數分析的資料為例，假若將採用傳統講解法者 (即第 I 組) 視為控制組，而以其他三組為實驗組，按下列公式進行多重比較：

$$t_D = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{MS_w \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad \text{其 } df = N - K$$

$$\text{第 II 組與第 I 組比較： } t_D = \frac{7.33 - 9.25}{\sqrt{12.84 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right)}} = -1.31$$

$$\text{第 III 組與第 I 組比較： } t_D = \frac{13.00 - 9.25}{\sqrt{12.84 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right)}} = 2.56$$

$$\text{第 IV 組與第 I 組比較： } t_D = \frac{16.25 - 9.25}{\sqrt{12.84 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right)}} = 4.78$$

查附錄 Table B, $k = 4$, $df_w = 44$, $\alpha = .05$ 時，單側檢定的臨界值 (*critical value*) 為 2.13，可見第 III 組及第 IV 及第 I 組相比較之 t_D 值均達到顯著水準，故可推斷「編序教學法及發現式教學法均優於講解法」。

(二) 薛費法 (*Scheff'e Method*)

H. Scheff'e 於 1959 年發展出一種適用範圍相當廣泛的多重比較法，無論各組樣本個數相等或不相等，皆可適用。此一方法對分配常態性與變異一致性兩項假定之違反頗不敏感，且所犯第一類型錯誤 (*type I error*) 的機率較小。其公式如下：

$$F = \frac{(X_1 - \bar{X}_2)^2}{MS_w \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (k-1)} \quad \text{其 } df = k-1, N-k$$

茲以表二、表三和表四變異數分析的資料為例，比較第 I 組與第 II 組的平均數，將有關數值代入公式，可得：

$$F = \frac{(9.25 - 7.33)^2}{12.84 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) (4-1)} = 0.57$$

其次，第 I 組與第 III 組比較：

$$F = \frac{(9.25 - 13.00)^2}{12.84 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) (4-1)} = 2.19$$

其餘兩兩比較的結果如下：

第 I、IV 組比較：F = 7.63；第 II、III 組比較：F = 5.01；

第 II、IV 組比較：F = 12.39；第 III、IV 組比較：F = 1.65。

查附錄 Table A，可得 $_{.95}F_{3,44} = 2.82$ ， $_{.99}F_{3,44} = 4.26$ ，據以與上列六個 F 值對照比較，其中三個達到 .01 顯著水準，另三個差異不顯著。上述多重比較的結果可呈現如表 5：

表五 薛費法多重比較結果

組 別	II	III	IV
I	.57	2.19	7.63 **
II		5.01 **	12.39 **
III			1.65

** p < .01

從表五可知：發現式教學法優於講解法及討論法；編序教學法優於討論法；其餘各組間間，差異均不顯著。

(⇒) 差距檢定 (Studentized Range Test)

當各組樣本個數相等時，比較 k 組平均數相互之間的差異，可用差距統計量 (the Studentized Range Statistic) 加以檢定，其公式如下：

$$Q = \frac{\bar{X}_{\max} - \bar{X}_{\min}}{\sqrt{MS_w / n}}$$

進行差距檢定時，必須先按各組平均數的大小由右而左排列，分別與平均數較小者比較，其中最大

的平均數與最小的平均數之差距最大，亦即 Q 值最大，如達顯著水準，再就次大者檢定之。由於臨界值之選取方式不同，乃有下列三種方法：

1. 涂凱法 (Tukey method)

此法又稱 honestly significant difference (hsd) method，係由 R.A.Fisher 所建議，再由 J.W. Tukey (1949) 研究發展而來。在進行平均數差距檢定時，不管介乎其間層級的多少，而以最多階次者為準，查表決定其臨界值；由於判斷時所採用的臨界值較大，故使平均數之間的差異不易達到顯著水準。茲以上述變異數分析的結果為例，說明涂凱法多重比較的步驟如下：

將各組平均數按其大小次序排列： $X_4 = 16.25$ ， $X_3 = 13.00$ ， $X_1 = 9.25$ ， $X_2 = 7.33$ 。先就最大者與最小者加以比較，代入上列公式，即可求得 Q 值：

$$Q = \frac{16.25 - 7.33}{\sqrt{12.84 / 12}} = 8.62$$

再就次大者與最小者加以比較：

$$Q = \frac{13.00 - 7.33}{\sqrt{12.84 / 12}} = 5.48$$

其餘各組平均數相互之間的 Q 值可一一代入公式求得，其結果如表六。其顯著性考驗之臨界值可查附錄 Table C 而得：

當 $r = 4$ ， $df_w = 40$ 時， $_{.95}Q = 3.79$ ， $_{.99}Q = 4.70$ 。

表六 涂凱法多重比較結果

組 別	I	III	IV
II	1.86	5.48 **	8.62 **
I		3.63	6.77 **
III			3.14

** $p < .01$

從表六可知：發現式教學法的教學效果最大，顯著優於講解法及討論法；討論法的教學效果最差，顯著劣於發現式教學法及編序教學法。其餘各組之間的差異並不顯著。

2. 紐曼—庫爾法 (Newman-Keuls Method)

D.Newman (1939) 和 M. Keuls (1952) 所發展的差距檢定程序稱為 N-K 法，其基本原理及計算公式雖與涂凱法相同，但必須依據相比的兩個平均數在排列次序中相差的層級數 (the number of steps between ordered mean) 查出不同的臨界 Q 值。假若仍以上述變異數分析的結果為例，先按四組樣本平均數的大小次序排列，第 IV 組最大，第 III 組次之，第 I 組又次之，第 II 組最小，相鄰兩組 (如第 I 組與第 II 組) 相差的層級數為 2，其臨界值 Q_2 表示之；中間相隔 1 組的兩組 (如第 III 組與第 II 組) 間相差的層級數為 3，其臨界值以 Q_3 表示之；中間相隔 2 組的兩組 (如第 IV 組與第 II 組) 間相差的層級為 4，其臨界值以 Q_4 表示。查附錄 Table C，當 $df_w = 40$ 時， $_{.95}Q_2 = 2.86$ ， $_{.95}Q_3 = 3.44$ ， $_{.95}Q_4 = 3.79$ ； $_{.99}Q_2 = 3.82$ ， $_{.99}Q_3 = 4.37$ ， $_{.99}Q_4 = 4.70$ 。表 7 所列者為各組平數相

互比較時代入差距檢定公式而求得的 Q 值，分別依據平均數大小次序相差的層級數，與上列臨界值比較，以考驗其差異的顯著性。

表七 紐曼—庫爾法多重比較結果

組 別	I	III	IV
II	1.86	5.48 **	8.62 **
I		3.63 *	6.77 **
III			3.14 *

* $p < .05$; ** $p < .01$

從表七可知：除第 I 組與第 II 組之間的差異不顯著外，其餘各組相互間均有顯著的差異，亦即發現式教學法的教學效果最好，編序教學法次之，講解法和討論法較差。

3. 鄧肯法 (Duncan Method)

D.B. Duncan(1955, 1957) 發展出一種新的差距檢定法，稱為 Duncan new multiple-range test，雖類似於紐曼—庫爾法的序列檢定程序，但必須使用特別的臨界值表（見附錄 Table D），且其顯著水準與其他方法有所不同，可用 $1 - (1 - \alpha)^{k-1}$ 加以推算。當各組平均數按大小次序排列後，k 代表兩個平均數在排列次序中相差的層級數。若 $\alpha = .01$ ，當 $k = 2$ 時，其顯著水準為 $1 - (1 - .01)^{2-1} = .01$ ；當 $k = 3$ 時，其顯著水準為 $1 - (1 - .01)^{3-1} = .02$ ；當 $k = 4$ 時，其顯著水準為 $1 - (1 - .01)^{4-1} = 0.3$ 。

茲根據上述變異數分析的結果，將有關數值代入差距檢定公式，求得各組平均數相互之間的 Q 值，再查附錄 Table D，df = 40 時，其臨界值如下：

若 $\alpha = .05$ ， $Q_2 = 2.858$ ， $Q_3 = 3.006$ ， $Q_4 = 3.102$ ；

若 $\alpha = .01$ ， $Q_2 = 3.825$ ， $Q_3 = 3.988$ ， $Q_4 = 4.098$ 。

表八為各組平均數相互間差異顯著性檢定的結果：

表八 鄧肯法多重比較結果

組 別	I	III	IV
II	1.86	5.48 **	8.62 **
I		3.63 *	6.77 **
III			3.14 *

* $p < .05$; ** $p < .01$

從表八可知：講解法與討論法的教學效果較差，兩組之並無顯著差異；發現式教學法最優，編序教學法次之，其與他組之間的差異均達顯著水準。

綜上所述，以薛費法適用的範圍最廣，差距檢定法祇適用於各組樣本個數相等的情況，杜納德法通常適用於幾個實驗組與一個控制組相比較的場合。如就各種方法所犯第一類型錯誤的機率而言，以薛費法最小，涂凱法次之，紐曼—庫爾又次之，鄧肯法最大；如就其所犯第二錯誤（type II error）的機率言之，則適相反，以鄧肯法最小，紐曼—庫爾法次，涂凱法又次之，薛費法最大。因此，在選擇多重比較法之時宜從上述條件及有關因素加以考慮。

參考文獻

- 林清山：心理與教育統計學（修正版）。台北市，東華書，民國 67 年。
- 楊國樞等譯：行為統計學（修訂版）。台北市，環球書社，民國 67 年。
- Blalock, H.M. Social statistics. (2nd ed.) New York : McGraw-Hill, 1972.
- Bruning, J., & Kintz, B.L. Computational handbook of statistics. Glenview, Ill. : Scott, Foresman and Co., 1968.
- Edwards, A.L. Statistical methods. (2nd ed.) New York : Holt, Rinehart and Winston, 1967.
- Ferguson, G.A. Statistical analysis in psychology & education. (4th ed.) New York : McGraw-Hill, 1976.
- Glass, G.V., & Stanley, J.C. Statistical methods in education and psychology. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1978.
- Guilford, J.P., & Fruchter, B. Fundamental statistics in psychology and education. (6th ed.) New York : McGraw-Hill, 1978.
- Hays, W.L. Statistics for the social sciences. (2nd ed.) New York : Holt, Rinehart and Winston, 1973.
- Roscoe, J.T. Fundamental research statistics for the behavioral sciences. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- Runyon, R.P., & Haber, A. Fundamentals of behavioral statistics. (3rd ed.) Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1976.
- Snedecor, G.W., & Cochran, W.G. Statistical Methods. (6th ed.) Ames, Iowa : The Iowa State University Press, 1967.
- Winer, B.J. Statistical Principles in experimental design. (2nd ed.) New York : McGraw-Hill, 1971.
- Yamane, T. Statistics : An introductory analysis. (3rd ed.) New York : Harper & Row, 1973.

TABLE A
5%(Roman Type) And 1%(Bold Face Type) Points For The Distribution of F

f ₁	f ₂ Degrees of Freedom (for greater mean square)																		∞					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40		50	75	100	200	500
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	254	254	254	254
2	4.052	4.999	5.403	5.625	5.764	5.859	5.928	5.981	6.022	6.056	6.082	6.106	6.142	6.169	6.208	6.234	6.261	6.286	6.302	6.323	6.334	6.352	6.361	6.366
3	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
4	98.49	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.41	99.42	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.49	99.50	99.50	99.50
5	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
6	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.27	26.23	26.18	26.14	26.12
7	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
8	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.45	14.37	14.24	14.15	14.02	13.93	13.83	13.74	13.69	13.61	13.57	13.52	13.48	13.46
9	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
10	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.29	10.15	10.05	9.96	9.89	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.07	9.04	9.02
11	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
12	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.60	7.52	7.39	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.94	6.90	6.88
13	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
14	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47	6.35	6.27	6.15	6.07	5.98	5.90	5.85	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65
15	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93
16	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.11	5.06	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86
17	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
18	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.00	4.92	4.80	4.73	4.64	4.56	4.51	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31
19	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
20	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
21	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
22	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.80	3.74	3.70	3.66	3.62	3.60
23	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
24	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.05	3.98	3.86	3.78	3.70	3.61	3.56	3.49	3.46	3.41	3.38	3.36
25	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
26	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.85	3.78	3.67	3.59	3.51	3.42	3.37	3.30	3.27	3.21	3.18	3.16

The function, $F = \alpha$ with exponent $2z$, is computed in part from Fisher's table VI(7). Additional entries are by interpolation, mostly graphical.

TABLE A
Degrees of Freedom (for greater mean square)
(Continued)

f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13	3.00
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07	2.87
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.56	3.48	3.36	3.29	3.20	3.12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01	2.75
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.98	2.96	2.80	2.77	2.75	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	2.65
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	2.57
	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.83	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88	2.49
	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.54	2.51	2.49	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84	2.42
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23	3.13	3.05	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.42	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81	2.36
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.63	2.58	2.51	2.47	2.42	2.38	2.36	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78	2.31
	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.14	2.10	2.04	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76	2.26
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73	2.21
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21	
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71	2.17
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17	
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.74	1.72	1.70	1.69	2.13
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13	

TABLE 'A
(Continued)

f_1		f_2 Degrees of Freedom (for greater mean square)																	f_3					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.14	3.06	2.98	2.93	2.83	2.74	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.25	2.21	2.16	2.12	2.10
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.90	2.80	2.71	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.13	2.09	2.06
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87	2.77	2.68	2.57	2.49	2.41	2.32	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84	2.74	2.66	2.55	2.47	2.38	2.29	2.24	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.07	2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.86	2.80	2.70	2.62	2.51	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.38	3.21	3.08	2.97	2.89	2.82	2.76	2.66	2.58	2.47	2.38	2.30	2.21	2.15	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.03	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.78	2.72	2.62	2.54	2.43	2.35	2.26	2.17	2.12	2.04	2.00	1.94	1.90	1.87
38	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.91	2.82	2.75	2.69	2.59	2.51	2.40	2.32	2.22	2.14	2.08	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73	2.66	2.56	2.49	2.37	2.29	2.20	2.11	2.05	1.97	1.94	1.88	1.84	1.81
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	7.27	5.15	4.29	3.80	3.49	3.26	3.10	2.96	2.86	2.77	2.70	2.64	2.54	2.46	2.35	2.26	2.17	2.08	2.02	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48	1.46
	7.24	5.12	4.26	3.78	3.46	3.24	3.07	2.94	2.84	2.75	2.68	2.62	2.52	2.44	2.32	2.24	2.15	2.06	2.00	1.92	1.88	1.82	1.78	1.75
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46
	7.21	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.05	2.92	2.82	2.73	2.66	2.60	2.50	2.42	2.30	2.22	2.13	2.04	1.98	1.90	1.86	1.80	1.76	1.72
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96	1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45
	7.19	5.08	4.22	3.74	3.42	3.20	3.04	2.90	2.80	2.71	2.64	2.58	2.48	2.40	2.28	2.20	2.11	2.02	1.96	1.88	1.84	1.78	1.73	1.70

TABLE A (Continued)

f_1 Degrees of Freedom (for greater mean square)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
50	50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.95	1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
		7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.18	3.02	2.88	2.78	2.70	2.62	2.56	2.46	2.39	2.26	2.18	2.10	2.00	1.94	1.86	1.82	1.76	1.71	1.68
55	55	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.97	1.93	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.43	1.41
		7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53	2.43	2.35	2.23	2.15	2.06	1.96	1.90	1.82	1.78	1.71	1.66	1.64
60	60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39
		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.40	2.32	2.20	2.12	2.03	1.93	1.87	1.79	1.74	1.68	1.63	1.60
65	65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.02	1.96	1.94	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
		7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.79	2.70	2.61	2.54	2.47	2.37	2.30	2.18	2.09	2.00	1.90	1.84	1.76	1.71	1.64	1.60	1.56
70	70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.93	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35
		7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.77	2.67	2.59	2.51	2.45	2.35	2.28	2.15	2.07	1.98	1.88	1.82	1.74	1.69	1.62	1.56	1.53
80	80	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.86	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
		6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.41	2.32	2.24	2.11	2.03	1.94	1.84	1.78	1.70	1.65	1.57	1.52	1.49
100	100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	1.28
		6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.82	2.69	2.59	2.51	2.43	2.36	2.26	2.19	2.06	1.98	1.89	1.79	1.73	1.64	1.59	1.51	1.46	1.43
125	125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.83	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25
		6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.65	2.56	2.47	2.40	2.33	2.23	2.15	2.03	1.94	1.85	1.75	1.68	1.59	1.54	1.46	1.40	1.37
150	150	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22
		6.81	4.75	3.91	3.44	3.14	2.92	2.76	2.62	2.53	2.44	2.37	2.30	2.20	2.12	2.00	1.91	1.83	1.72	1.66	1.56	1.51	1.43	1.37	1.33
200	200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.83	1.80	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19
		6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.90	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.28	2.17	2.09	1.97	1.88	1.79	1.69	1.62	1.53	1.48	1.39	1.33	1.28
400	400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.36	1.32	1.28	1.22	1.16	1.13
		6.70	4.66	3.83	3.36	3.06	2.85	2.69	2.55	2.46	2.37	2.29	2.23	2.12	2.04	1.92	1.84	1.74	1.64	1.57	1.47	1.42	1.32	1.24	1.19
1000	1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08
		6.66	4.62	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.26	2.20	2.09	2.01	1.89	1.81	1.71	1.61	1.54	1.44	1.38	1.28	1.19	1.11
∞	∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00
		6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24	2.18	2.07	1.99	1.87	1.79	1.69	1.59	1.52	1.41	1.36	1.25	1.15	1.00

TABLE B Distribution of t Statistic in Comparing Treatment Means with a Control†‡

df for MS,....	$1 - \alpha$	$k = \text{number of means (including control)}$								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	.95	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.03
	.975	2.57	3.03	3.29	3.48	3.62	3.73	3.82	3.90	3.97
	.99	3.36	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	4.94	5.03
	.995	4.03	4.63	4.98	5.22	5.41	5.56	5.69	5.80	5.89
6	.95	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
	.975	2.45	2.86	3.10	3.26	3.39	3.49	3.57	3.64	3.71
	.99	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
	.995	3.71	4.21	4.51	4.71	4.87	5.00	5.10	5.20	5.28
7	.95	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
	.975	2.36	2.75	2.97	3.12	3.24	3.33	3.41	3.47	3.53
	.99	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
	.995	3.50	3.95	4.21	4.39	4.53	4.64	4.74	4.82	4.89
8	.95	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
	.975	2.31	2.67	2.88	3.02	3.13	3.22	3.29	3.35	3.41
	.99	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
	.995	3.36	3.77	4.00	4.17	4.29	4.40	4.48	4.56	4.62
9	.95	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
	.975	2.26	2.61	2.81	2.95	3.05	3.14	3.20	3.26	3.32
	.99	2.28	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
	.995	3.25	3.63	3.85	4.01	4.12	4.22	4.30	4.37	4.43
10	.95	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
	.975	2.23	2.57	2.76	2.89	2.99	3.07	3.14	3.19	3.24
	.99	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
	.995	3.17	3.53	3.74	3.88	3.99	4.08	4.16	4.22	4.28
11	.95	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
	.975	2.20	2.53	2.72	2.84	2.94	3.02	3.08	3.14	3.19
	.99	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
	.995	3.11	3.45	3.65	3.79	3.89	3.98	4.05	4.11	4.16
12	.95	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
	.975	2.18	2.50	2.68	2.81	2.90	2.98	3.04	3.09	3.14
	.99	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
	.995	3.05	3.39	3.58	3.71	3.81	3.89	3.96	4.02	4.07
13	.95	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
	.975	2.16	2.48	2.65	2.78	2.87	2.94	3.00	3.06	3.10
	.99	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
	.995	3.01	3.33	3.52	3.65	3.74	3.82	3.89	3.94	3.99
14	.95	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
	.975	2.14	2.46	2.63	2.75	2.84	2.91	2.97	3.02	3.07
	.99	2.62	2.94	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
	.995	2.98	3.29	3.47	3.59	3.69	3.76	3.83	3.88	3.93

TABLE B (Continued) †‡

df for MS.....	1 - α	k = number of means (including control)									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	
16	.95	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65	
	.975	2.12	2.42	2.59	2.71	2.80	2.87	2.92	2.97	3.02	
	.99	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48	
	.995	2.92	3.22	3.39	3.51	3.60	3.67	3.73	3.78	3.83	
18	.95	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62	
	.975	2.10	2.40	2.56	2.68	2.76	2.83	2.89	2.94	2.98	
	.99	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42	
	.995	2.88	3.17	3.33	3.44	3.53	3.60	3.66	3.71	3.75	
20	.95	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60	
	.975	2.09	2.38	2.54	2.65	2.73	2.80	2.86	2.90	2.95	
	.99	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38	
	.995	2.85	3.13	3.29	3.40	3.48	3.55	3.60	3.65	3.69	
24	.95	1.71	2.01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57	
	.975	2.06	2.35	2.51	2.61	2.70	2.76	2.81	2.86	2.90	
	.99	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31	
	.995	2.80	3.07	3.22	3.32	3.40	3.47	3.52	3.57	3.61	
30	.95	1.70	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54	
	.975	2.04	2.32	2.47	2.58	2.66	2.72	2.77	2.82	2.86	
	.99	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24	
	.995	2.75	3.01	3.15	3.25	3.33	3.39	3.44	3.49	3.52	
40	.95	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51	
	.975	2.02	2.29	2.44	2.54	2.62	2.68	2.73	2.77	2.81	
	.99	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18	
	.995	2.70	2.95	3.09	3.19	3.26	3.32	3.37	3.41	3.44	
60	.95	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48	
	.975	2.00	2.27	2.41	2.51	2.58	2.64	2.69	2.73	2.77	
	.99	2.39	2.64	2.78	2.87	2.91	3.00	3.04	3.08	3.12	
	.995	2.66	2.90	3.03	3.12	3.19	3.25	3.29	3.33	3.37	
120	.95	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45	
	.975	1.98	2.24	2.38	2.47	2.55	2.60	2.65	2.69	2.73	
	.99	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06	
	.995	2.62	2.85	2.97	3.06	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	
∞	.95	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42	
	.975	1.96	2.21	2.35	2.44	2.51	2.57	2.61	2.65	2.69	
	.99	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00	
	.995	2.58	2.79	2.92	3.00	3.06	3.11	3.15	3.19	3.22	

+ Entries in rows .975 and .995 are for two-sided simultaneous confidence intervals with $\alpha = .05$ and $.01$, respectively. Entries in rows .95 and .99 are for one-sided confidence simultaneous intervals with $\alpha = .05$ and 0.1 , respectively.

‡ This table is reproduced from : A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control. Journal of the American Statistical Association, 1955, 50, 1096-1121, and New tables for multiple comparisons with a control. Biometrics, 1964, 20, 482-491, with the permission of the author, C. W. Dunnett, and the editors.

TABLE C Distribution of the Studentized Range Statistic†

df for \bar{x}	$1-\alpha$	r = number of steps between ordered means														
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	.95	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	
	.99	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277	
2	.95	6.09	8.3	9.8	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7	
	.99	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4	
3	.95	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.4	10.5	
	.99	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5	
4	.95	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	
	.99	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	
5	.95	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	
	.99	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	
6	.95	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	
	.99	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	
7	.95	3.34	4.16	4.69	5.06	5.36	5.6	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	
	.99	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	
8	.95	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	
	.99	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	
9	.95	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	
	.99	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	
10	.95	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	
	.99	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	

† This table is abridged from Table II.2 in The Probability Integrals of the Range and of the Studentized Range, prepared by H. Leon Harter, Donald S. Clemm, and Eugene H. Guthrie. These tables are published in WADC tech. Rep. 58-484, vol. 2, 1959, Wright Air Development Center, and are reproduced with the kind permission of the authors.

11	.95 .99	3.11 4.39	3.82 5.14	4.26 5.62	4.57 5.97	4.82 6.25	5.03 6.48	5.20 6.67	5.35 6.84	5.49 6.99	5.61 7.13	5.71 7.26	5.81 7.36	5.90 7.46	5.99 7.56
12	.95 .99	3.08 4.32	3.77 5.04	4.20 5.50	4.51 5.84	4.75 6.10	4.95 6.32	5.12 6.51	5.27 6.67	5.40 6.81	5.51 6.94	5.62 7.06	5.71 7.17	5.80 7.26	5.88 7.36
13	.95 .99	3.06 4.26	3.73 4.96	4.15 5.40	4.45 5.73	4.69 5.98	4.88 6.19	5.05 6.37	5.19 6.53	5.32 6.67	5.43 6.79	5.53 6.90	5.63 7.01	5.71 7.10	5.79 7.19
14	.95 .99	3.03 4.21	3.70 4.89	4.11 5.32	4.41 5.63	4.64 5.88	4.83 6.08	4.99 6.26	5.13 6.41	5.25 6.54	5.36 6.66	5.46 6.77	5.55 6.87	5.64 6.96	5.72 7.05
16	.95 .99	3.00 4.13	3.65 4.78	4.05 5.19	4.33 5.49	4.56 5.72	4.74 5.92	4.90 6.08	5.03 6.22	5.15 6.35	5.26 6.46	5.35 6.56	5.44 6.66	5.52 6.74	5.59 6.82
18	.95 .99	2.97 4.07	3.61 4.70	4.00 5.09	4.28 5.38	4.49 5.60	4.67 5.79	4.82 5.94	4.96 6.08	5.07 6.20	5.17 6.31	5.27 6.41	5.35 6.50	5.43 6.58	5.50 6.65
20	.95 .99	2.95 4.02	3.58 4.64	3.96 5.02	4.23 5.29	4.45 5.51	4.62 5.69	4.77 5.84	4.90 5.97	5.01 6.09	5.11 6.19	5.20 6.29	5.28 6.37	5.36 6.45	5.43 6.52
24	.95 .99	2.92 3.96	3.53 4.54	3.90 4.91	4.17 5.17	4.37 5.37	4.54 5.54	4.68 5.69	4.81 5.81	4.92 5.92	5.01 6.02	5.10 6.11	5.18 6.19	5.25 6.26	5.32 6.33
30	.95 .99	2.89 3.89	3.49 4.45	3.84 4.80	4.10 5.05	4.30 5.24	4.46 5.40	4.60 5.54	4.72 5.56	4.83 5.76	4.92 5.85	5.00 5.93	5.08 6.01	5.15 6.08	5.21 6.14
40	.95 .99	2.86 3.82	3.44 4.37	3.79 4.70	4.04 4.93	4.23 5.11	4.39 5.27	4.52 5.39	4.63 5.50	4.74 5.60	4.82 5.69	4.91 5.77	4.98 5.84	5.05 5.90	5.11 5.96
60	.95 .99	2.83 3.76	3.40 4.28	3.74 4.60	3.98 4.82	4.16 4.99	4.31 5.13	4.44 5.25	4.55 5.36	4.65 5.45	4.73 5.53	4.81 5.60	4.88 5.67	4.94 5.73	5.00 5.79
120	.95 .99	2.80 3.70	3.36 4.20	3.69 4.50	3.92 4.71	4.10 4.87	4.24 5.01	4.36 5.12	4.48 5.21	4.56 5.30	4.64 5.38	4.72 5.44	4.78 5.51	4.84 5.56	4.90 5.61
∞	.95 .99	2.77 3.64	3.31 4.12	3.63 4.40	3.86 4.60	4.03 4.76	4.17 4.88	4.29 4.99	4.39 5.08	4.47 5.16	4.55 5.23	4.62 5.29	4.68 5.35	4.74 5.40	4.80 5.45

TABLE D Duncan's Multiple Range
Alpha = .05*

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
2	6.085																		
3	4.501	4.516																	
4	3.927	4.013	4.033																
5	3.635	3.749	3.797	3.814															
6	3.461	3.587	3.649	3.680	3.694														
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622													
8	3.261	3.399	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575												
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544											
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522										
11	3.113	3.256	3.342	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506									
12	3.082	3.225	3.313	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.496								
13	3.055	3.200	3.289	3.348	3.389	3.419	3.442	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488							
14	3.033	3.178	3.266	3.329	3.372	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482						
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478					
16	2.998	3.144	3.235	3.298	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.477				
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.366	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.473	3.475			
18	2.971	3.118	3.210	3.274	3.321	3.356	3.383	3.405	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.470	3.472	3.474		
19	2.960	3.107	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.467	3.470	3.472	3.473	
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.391	3.409	3.424	3.436	3.445	3.453	3.459	3.464	3.467	3.470	3.472	3.472
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.432	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465	3.469	
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.430	3.439	3.447	3.454	3.460	3.466	
40	2.858	3.006	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.373	3.390	3.405	3.418	3.429	3.439	3.448	3.456	3.463	
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.442	3.451	3.460	
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.287	3.314	3.337	3.359	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435	3.466	3.457	
∞	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.399	3.414	3.428	3.442	3.454	

TABLE D Duncan's Multiple Range (Cont.)
Alpha = .01*

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	14.04																	
3	8.461	8.321																
4	6.512	6.677	6.740															
5	5.702	5.893	5.989	6.040														
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655													
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416												
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256											
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142										
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058									
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994								
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944							
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889	4.904						
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872					
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846				
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768	4.786	4.800	4.813	4.825			
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738	4.756	4.771	4.785	4.797	4.807		
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711	4.729	4.745	4.759	4.772	4.783	4.792	
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.761	4.771	4.780
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.553	4.566	4.579
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.438	4.456	4.474	4.490	4.504	4.518
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394

One-Factor Analysis of Variance and Multiple Comparisons

Maw-fa Chien
(Abstract)

The analysis of variance is a method by which the sources of variation observed in experimental data may be segregated and analyzed. In all problems where the samples are randomly drawn from normal populations having the same variance, the analysis of variance provides an effective and powerful technique. The simplest type of analysis of variance model is the one in which observations are classified into groups on the basis of a single property. The kn subjects are randomly assigned into each of k treatments in such a way that for each treatment there is n subjects. In this article the analysis of variance for a simple randomized, or completely randomized, design is illustrated. The following steps are involved :

1. Partition the total sum of squares into two components, a within-groups and a between-groups sum of squares, using the appropriate computation formulas.
2. Divide these sums of squares by the associated number of degrees of freedom to obtain MS_w and MS_b , the within- and between-group variance estimates.
3. Calculate the F ratio, MS_b/MS_w , and refer this to the table F (Table A of the Appendix).
4. If the probability of obtaining the observed F value is small, say, less than .05 or .01, under the null hypothesis, reject that hypothesis.

There are a variety of statistical procedures available for multiple comparison between specific means following analysis of variance if the null hypothesis is rejected. Methods in common use, using a t statistic, the F test, and studentized range, have been developed by Dunnett (1955), Scheffe (1953), Tukey (1949), Newman (1939), Keuls (1952), and Duncan (1955, 1957). In terms of per-comparison Type I error, multiple-comparison procedures may be ordered from low to high as follows: Scheffe, Tukey, Newman-Keuls, and Duncan. In terms of Type II error, the order of the procedure is the reverse: Duncan, Newman-Keuls, Tukey, and Scheffe.

One-Factor Analysis of Variance and Multiple Comparisons

Mao-fa Chien
(Abstract)

The analysis of variance is a method by which the sources of variation observed in experimental data may be segregated and analyzed. In all problems where the samples are randomly drawn from normal populations having the same variance, the analysis of variance provides an effective and powerful technique. The simplest type of analysis of variance model is the one in which observations are classified into groups on the basis of a single property. The k subjects are randomly assigned into each of k treatments in such a way that for each treatment there is a subject. In this article the analysis of variance for a simple randomized or completely randomized design is discussed. The following steps are involved:

1. Partition the total sum of squares into two components, a within-groups and a between-groups sum of squares, using the appropriate computation formulas.
2. Divide these sums of squares by the associated number of degrees of freedom to obtain MS_{within} and MS_{between} , the within and between-group variance estimates.
3. Calculate the F ratio, $MS_{\text{between}}/MS_{\text{within}}$, and refer this to the table F (Table A of the Appendix).
4. If the probability of obtaining the observed F value is small, say, less than 0.05 or 0.01, under the null hypothesis, reject that hypothesis.

There are a variety of statistical procedures available for multiple comparison between specific means following analysis of variance if the null hypothesis is rejected. Methods in common use, using a t statistic, the F test, and studentized range, have been developed by Dunnett (1955), Scheffé (1953), Tukey (1951), Newman-Kuels (1952), and Duncan (1955, 1957). In terms of permutation non Type I error, multiple-comparison procedures may be ordered from low to high as follows: Scheffé, Tukey, Newman-Kuels, and Duncan. In terms of type II error the order of the procedure is the reverse: Duncan, Newman-Kuels, Tukey, and Scheffé.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----