克朗巴賀α係數問題之探討：從微分矩陣學的觀點

鄭富森　劉湘川　林原宏　郭伯臣　黃孝雲
國立台中師範學院教育測驗統計研究所

摘要

本文的目的，是根據矩陣代數學的原理，推演古典測驗理論的信度係數之下限與上限值，此下限值可作為測驗之信度係數。

Cronbach（1951）所提出的α係數使用非常地廣泛。基本上，α係數也是一個下限值，但使用上會發生負值等不合理的結果，讓使用者感到相當的困惑。至今四十多年來，探討α係數性質的研究者，大多從資料模擬、數值分析等方法來探討，然後根據資料結果，來告訴使用者應注意的現象，但卻無法提供一個更合理的信度係數計算方法。

本文根據矩陣代數學所推演出的信度係數下限值，對於改進α係數，具有重大意義。未來有關這些矩陣代數學所推演出的信度係數特性，將陸續發表於國內外各專業學術期刊，對於測驗方法學將有重大的貢獻。

壹、前言

克朗巴賀α係數（Cronbach, 1951）是我國教育與心理測驗學術界最常用的測驗信度估算公式，可是長久以來，有不少人在使用克朗巴賀α係數時，遇到一些奇怪的現象，例如，依照古典測驗理論（Classical True-score Theory, Suen, 1990; Allen, ＆ Yen, 1979），測驗信度理應大於或等於零，且小於或等於一。可是卻有人遇到克朗巴賀α係數為負數，而不知如何處理。為了徹底解決這些問題，本研究試圖從新的觀點來探討這些問題。本研究先探究克朗巴賀α係數原本的理論，然後再運用向量代數學，模仿原本理論，重新演證一次，藉以確定，從新觀點，運用新技術，重新推導演證這個理論的可能。最後本研究再運用微分矩陣學，推演探討克朗巴賀α係數及測驗信度，期望藉此得到更好的測驗信度估計方法。

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月　37-58 頁

另外，為了方便討論與推演理論，本研究所採用的符號和假設，以及一些基本定理，皆參照鄭富森等所著的另一篇論文（鄭富森、許天維、施淑娟、施慶麟，民 87）內所採用的符號與假設，以及一些基本定理。

貳、克朗巴賀α係數

依照 Lord 和 Novick 在 1968 年所出版之 Statistical theories of mental test scores 一書所載，克朗巴賀α係數的理論簡述如下：

定理 1 假設 X 表 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 之測驗得分之總和，即 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$，$E = \sum_{i=1}^{n} E_i$，和 $X_i = T_i + E_i$，且 X' 表 X 之平行測驗，則可得

$$\rho(X, X') \equiv \rho^2(X, T) \geq \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i)}{\sigma^2(X)}\right]$$

證明：

因為 $\left[\sigma(T_i) - \sigma(T_j)\right]^2 \geq 0$

所以

$$\sigma^2(T_i) + \sigma^2(T_j) \geq 2\sigma(T_i)\sigma(T_j) \tag{1}$$

因為 $\left|\rho(T_i, T_j)\right| = \frac{\left|\sigma(T_i, T_j)\right|}{\sigma(T_i)\sigma(T_j)} \leq 1$

$$\sigma(T_i)\sigma(T_j) \geq \left|\sigma(T_i, T_j)\right| \tag{2}$$

根據（1），（2）可得

$$\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\geq 2\left|\sigma(T_i,T_j)\right|\geq 2\sigma(T_i,T_j)$$

故

$$\sum_{i\neq j}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right]\geq 2\sum_{i\neq j}^{n}\sigma(T_i,T_j) \qquad (3)$$

又因為

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[n\sigma^2(T_i)+\sum_{j=1}^{n}\sigma^2(T_j)\right]$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+n\sum_{j=1}^{n}\sigma^2(T_j)$$

$$=2n\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i) \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right]=\sum_{i=j}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right]+\sum_{i\neq j}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right]$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum_{i\neq j}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right] \qquad (5)$$

由（4），（5）可知

$$\sum_{i\neq j}^{n}\left[\sigma^2(T_i)+\sigma^2(T_j)\right]=2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i) \qquad (6)$$

由（3），（6）可得

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月 37-58 頁

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i) \ge \frac{\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(T_i,T_j)}{n-1} \tag{7}$$

因為

$$\sigma^2(T)=\sigma^2(\sum_{i=1}^{n}T_i)=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(T_i,T_j)$$

根據（7）得　$\sigma^2(T) \ge \frac{\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(T_i,T_j)}{n-1}+\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(T_i,T_j)$

所以

$$\sigma^2(T) \ge \frac{n}{n-1}\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(T_i,T_j) \tag{8}$$

因為　$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(X_i,X_j)$

所以

$$\sigma^2(X)-\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)=\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(X_i,X_j)=\sum_{i\ne j}^{n}\sigma(T_i,T_j) \tag{9}$$

將（9）代入（8）中，可得

$$\sigma^2(T) \ge \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2(X)-\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)\right] \tag{10}$$

再將（8）左右同除$\sigma^2(X)$可得

$$\rho^2(X,T) \equiv \frac{\sigma^2(T)}{\sigma^2(X)} \geq \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)}{\sigma^2(X)}\right] \tag{11}$$

而 Cronbach（1951）令

$$\alpha \equiv \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)}{\sigma^2(X)}\right] \tag{12}$$

由（11）可知α係數為信度之一下限（lower bound），且因為在（9）$\sum_{i\neq j}^{n}\sigma(X_i,X_j)$中可能為負，所以可能有$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)\geq\sigma^2(X)$的情形發生，此時的$\alpha$呈現負值。

參、應用向量代數重證α係數

以下將從向量代數學的觀點，對α係數重新進行詳細的理論推演，證明過程如下，還有為了方便討論與推演理論，本研究所採用的符號和假設，以及一些基本定理，皆參照鄭富森等所著的另一篇論文（鄭富森、許天維、施淑娟、施慶麟，民 87）內所採用的符號與假設，以及一些基本定理，所以在此不再贅述。

<u>證明</u>：

因為

$$\left(\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|-\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|\right)^2=\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2+\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2-2\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|\geq 0$$

所以

$$\frac{1}{N}\left(\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2+\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2\right)\geq\frac{1}{N}\left(2\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|\right)$$

$$\geq\frac{1}{N}2\left|\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)\right| \quad \text{（科西不等式）}$$

$$\geq\frac{2}{N}\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)$$

故

$$\sum_{i\neq j}^{n}\frac{1}{N}\left(\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2+\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2\right)\geq 2\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N} \tag{13}$$

又因為

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N}\left(\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2+\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[n\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2}{N}\right]$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+n\sum_{j=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2}{N}$$

$$=2n\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N} \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N}\left(\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2+\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2\right.$$

$$=\sum_{i=j}^{n}\left[\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+\frac{\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2}{N}\right]+\sum_{i\neq j}^{n}\left[\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+\frac{\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2}{N}\right]$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+\sum_{i\neq j}^{n}\left[\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+\frac{\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2}{N}\right] \tag{15}$$

由（b），（c）可知

$$\sum_{i\neq j}^{n}\left[\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N}+\frac{\left\|\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right\|^2}{N}\right]=2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^2}{N} \tag{16}$$

由（a），（d）可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^{2}}{N}\geq\frac{\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N}}{n-1} \tag{17}$$

因為 $\frac{\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right\|^{2}}{N}+\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N}$

根據（e）得

$$\frac{\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}\geq\frac{\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N}}{n-1}+\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N}$$

所以

$$\frac{\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}\geq\frac{n}{n-1}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N} \tag{18}$$

因為

$$\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{X}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}\right\|^{2}}{N}+\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{X}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{X}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{j\bullet}\right)}{N}$$

所以

$$\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|\mathbf{X}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}\right\|^{2}}{N}=\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{X}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{X}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{j\bullet}\right)}{N}$$

$$=\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\left(\mathbf{T}_{i\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i\bullet}\right)\left(\mathbf{T}_{j\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j\bullet}\right)}{N} \tag{19}$$

將（g）代入（f）中可得

$$\frac{\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N} \geq \frac{n}{n-1}\left[\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\|\mathbf{X}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i \bullet}\right\|^{2}}{N}\right] \tag{20}$$

將（h）左右同除$\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}$可得

$$\left(\frac{(\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet})(\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet})}{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|}\right)^{2}=\frac{\frac{\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}}{\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}} \geq \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\|\mathbf{X}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i \bullet}\right\|^{2}}{N}}{\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}}\right]$$

又 $\hat{\rho}(X,X')=\hat{\rho}^{2}(X,T)=\left(\frac{(\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet})(\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet})}{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|\left\|\mathbf{T}_{\bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{\bullet}\right\|}\right)^{2} \geq \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\|\mathbf{X}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i \bullet}\right\|^{2}}{N}}{\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}}\right]$

即 $\hat{\rho}(X,X')=\hat{\rho}^{2}(X,T) \geq \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\|\mathbf{X}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i \bullet}\right\|^{2}}{N}}{\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}}\right]$　　（21）

而 Cronbach（1951）令　$\alpha \equiv \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\|\mathbf{X}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i \bullet}\right\|^{2}}{N}}{\frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}}\right]$

由（i）可知α係數為信度之一下限（lower bound），且因為在（e）中

$\sum_{i \neq j}^{n} \frac{(\mathbf{T}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{i \bullet})(\mathbf{T}_{j \bullet}-\overline{\mathbf{T}}_{j \bullet})}{N}$可能為負，所以可能有$\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\|\mathbf{X}_{i \bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{i \bullet}\right\|^{2}}{N} \geq \frac{\left\|\mathbf{X}_{\bullet}-\overline{\mathbf{X}}_{\bullet}\right\|^{2}}{N}$的情形

發生，此時的α呈現負值。

肆、從向量代數學和微分矩陣學觀點重建信度係數估計方法

一、測驗信度係數與克朗巴賀α係數之關係

首先本研究藉由理論公式的推演，試圖重新尋找測驗信度係數與克朗巴賀α係數之關係，藉以瞭解造成克朗巴賀α係數負值問題的真正原因。

定理 2　$\sigma(X_i, X_j) = \sigma(T_i, T_j)$

證明：

因為 $\varepsilon(E_i) = 0$，$T_\bullet \amalg E_\bullet$，

所以 $\sigma(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

$$= E[(T_i + E_i)(T_j + E_j)] - E[T_i + E_i]E[T_j + E_j]$$

$$= E[T_i T_j + T_i E_j + T_j E_i + E_i E_j] - [E(T_i)][E(T_j)]$$

$$= E[T_i T_j] - E(T_i)E(T_j)$$

$$= \sigma(T_i, T_j) \qquad \#$$

應用定理2，並且參照劉湘川等所著的另一篇論文（劉湘川、鄭富森、許天維、施淑娟、施慶麟，民 87）內所採用的符號與假設，以及一些基本定理，可得知測驗信度係數是

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民86年12月 37-58頁

$$\rho^2(X,T)=\frac{\sigma^2(T)}{\sigma^2(X)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(T_i,T_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)} \tag{22}$$

再回顧α係數的公式，

$$\alpha\equiv\frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)}{\sigma^2(X)}\right]=\frac{n}{n-1}\left[\frac{\sigma(X)-\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)}{\sigma^2(X)}\right]$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)}\bullet\frac{n}{n-1} \tag{23}$$

比較測驗信度係數與α係數的差異主要是

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)$$

或者當n相當大時，兩者的主要差異就是 $\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$。而且很明顯地，若

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月 37-58 頁

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)<0$ 時，則 α 係數變成一個負數。換言之，當大多數 X_i 之間的相關為負數或接近零時，則容易產生 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sigma(X_i,X_j)<0$，結果造成 α 係數變成一個負數。

二、$T_{\cdot}$和$E_{\cdot}$的無法決定性（Indeterminacy）

假設 n 為測驗或試題的個數，N 為受試者的人數。則一般而言，研究所得的測驗資料矩陣 $\mathbf{X}$ 只包含 $(N\times n)$ 個測驗分數，x_{is}。此外，根據古典測驗理論，我們有 $(N\times n)$ 個方程式，$X_{is}=T_{is}+E_{is}$，但是卻有 $2(N\times n)$ 個未知數需要解答，因此，太少的訊息，不足夠的方程式，以及過多的未知數造成所有的 T_{is} 和 E_{is} 可能有無限多組解，此即 T_{is} 和 E_{is} 的無法決定性（Indeterminacy）。此問題亦直接造成 $\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$ 的無法決定性，亦即造成測驗信度的無法決定性。

三、從微分矩陣學的角度重新出發

假設 S_T 為 $\mathbf{T}_i$ 所展開的 N 維向量的子空間，亦即

$$S_T=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{T}_i \mid a_i\in R^1,\mathbf{T}_i\in R^N,\ \text{for } i=1,2,\ldots,n\right\}$$

假設 S_E 為 $\mathbf{E}_i$ 所展開的 N 維向量的子空間，亦即

$$S_E=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{E}_i \mid a_i\in R^1,\mathbf{E}_i\in R^N,\ \text{for } i=1,2,\ldots,n\right\}$$

假設 S_X 為 $\mathbf{X}_i$ 所展開的 N 維向量的子空間，亦即

$$S_X=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{X}_i \mid a_i\in R^1,\mathbf{X}_i\in R^N,\ \text{for } i=1,2,\ldots,n\right\}$$

在一般情況下，如果測量誤差不為零，且所有測量誤差互相獨立，則下列三式皆成立。

$$1 \le \mathrm{rank}(S_T) \le n \tag{24}$$

$$\mathrm{rank}(S_E) = n \tag{25}$$

$$\mathrm{rank}(S_X) = n \tag{26}$$

接下來，令$\Sigma_X = \mathbf{X}'\mathbf{X}$，$\Sigma_T = \mathbf{T}'\mathbf{T}$，和$\Sigma_E = \mathbf{E}'\mathbf{E}$。若$\mathbf{T}_i$，$\mathbf{E}_i$，和$\mathbf{X}_i$皆為離均差分數（mean-deviation scores），則Σ_X，Σ_T，Σ_E皆為 SSCP 矩陣；若所有 SSCP 矩陣皆除以N，則Σ_X，Σ_T，Σ_E皆為共變數矩陣；若$\mathbf{T}_i$，$\mathbf{E}_i$，和$\mathbf{X}_i$皆為標準化分數（standardized scores），則Σ_X，Σ_T，Σ_E皆為相關係數矩陣。不論是 SSCP 矩陣，共變數矩陣，或相關係數矩陣，本研究的理論推導皆沒有影響，亦即本研究所推演的結果皆適用於各種情況。

藉由對Σ_X進行主成分分析（principal-components analysis），可以得到下列三組數據：

1.特徵值 λ_1、λ_2、、、λ_n。

2.特徵向量 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、、、$\mathbf{v}_n$。

3.主成份分數 $\mathbf{P}_1$、$\mathbf{P}_2$、、、$\mathbf{P}_n$。

在這三組數據中，有下列特性：

1. $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge$、、、$\ge \lambda_n \ge 0$。

2. $\mathbf{v}_i'\mathbf{v}_j = 0$ 和 $\mathbf{v}_i'\mathbf{v}_i = 1$，當$i, j = 1,2,\ldots,n$，且$i \ne j$。

3. $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}\mathbf{v}_i$，$\mathbf{P}_i'\mathbf{P}_j = 0$ 和 $\mathbf{P}_i'\mathbf{P}_i = \lambda_i$，當$i, j = 1,2,\ldots,n$，且$i \ne j$。

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心

測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月　37-58 頁

若假設 S_P 為 $\mathbf{P}_i$ 所展開的 N 維向量的子空間，亦即

$$S_P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{P}_i \mid a_i \in R^1, \mathbf{P}_i \in R^N, \text{ for } i = 1,2,\ldots,n \right\},$$

則 $S_X = S_P$ 。

四、S_X 、S_T 、S_E 和 S_P 之間的關係

對任何一個子空間而言，其共變數矩陣可以詳實描述該子空間的特徵，因此如欲探討 S_X 、S_T 、S_E 和 S_P 之間的關係，最方便的途徑就是探討 Σ_X 、Σ_T 、Σ_E 和 Σ_P 之間的關係。經過一番公式推演，可得下列結果：

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma^2(T_1)+\sigma^2(E_1) & \sigma(T_1,T_2) & \cdots & \sigma(T_1,T_n) \\ \sigma(T_2,T_1) & \sigma^2(T_2)+\sigma^2(E_2) & \cdots & \sigma(T_2,T_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(T_n,T_1) & \sigma(T_n,T_2) & \cdots & \sigma^2(T_n)+\sigma^2(E_n) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_T = \begin{bmatrix} \sigma^2(T_1) & \sigma(T_1,T_2) & \cdots & \sigma(T_1,T_n) \\ \sigma(T_2,T_1) & \sigma^2(T_2) & \cdots & \sigma(T_2,T_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(T_n,T_1) & \sigma(T_n,T_2) & \cdots & \sigma^2(T_n) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_E = \begin{bmatrix} \sigma^2(E_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2(E_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2(E_n) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

從上述公式，我們可再推得下列結果：

1. $\lambda_i = \sigma^2(P_i)$ for $i = 1,2,\ldots,n$。

2. $\Sigma_X = \Sigma_T + \Sigma_E$。

3. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2(T_i)+\sigma^2(E_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$。

由上述三個結果顯示出一個估計$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$或$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$的可能方向，意即：因為$S_T$和$S_E$是兩個彼此獨立（independent）或直交（orthogonal）的子空間，而且S_X是由這兩個子空間合成的，所以若S_T^*和S_E^*是S_T和S_E在S_X的投影，再者若S_T^*和S_E^*是彼此獨立或直交，意即S_T^*和S_E^*可將S_X「分割」成兩部份。如果上述是可行的，則S_T^*和S_E^*兩個子空間各自的變異數總和，就可當作$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$或$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$的估計值。

五、S_T和S_E在S_X的投影

令S_T^*和S_E^*是S_T和S_E在S_X上的投影，接下來就讓我們探討S_T^*和S_E^*的性質。因為$\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n\}$並不是$S_X$的直交基底（orthogonal bases），所以為了方便理論公式的推演，我們改以S_P為研究對象，因為$S_P = S_X$，而且$\{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\ldots,\mathbf{P}_n\}$正是$S_X$的直交基底之一。

欲探討S_E在S_X上的投影，S_E^*，就需先探討$\mathbf{E}_l$在$\mathbf{P}_i$上的投影，然後再探討$\mathbf{E}_l$在S_X上的投影，$\mathbf{E}_l^*$。

$$\mathbf{E}_l \text{ 在 } \mathbf{P}_i \text{ 上的投影} = \frac{\mathbf{E}_l' \bullet \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{E}_l' \bullet \mathbf{X} \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i$$

$$= \frac{\mathbf{E}_l' \bullet (\mathbf{T}+\mathbf{E}) \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{E}_l' \bullet \mathbf{E} \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{E}_l \text{ 在 } S_X \text{ 上的投影} = \mathbf{E}_l^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E}_l' \bullet \mathbf{E} \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i$$

同理，欲探討S_T在S_X上的投影，S_T^*，就需先探討$\mathbf{T}_k$在$\mathbf{P}_i$上的投影，然後再探討$\mathbf{T}_k$在S_X上的投影，$\mathbf{T}_k^*$。

$$\mathbf{T}_k \text{ 在 } \mathbf{P}_i \text{ 上的投影} = \frac{\mathbf{T}_k' \bullet \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{T}_k' \bullet \mathbf{X} \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{T}_k' \bullet \mathbf{T} \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{T}_k \text{在} S_X \text{上的投影} = \mathbf{T}_k^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{T}_k' \bullet \mathbf{T} \bullet \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2} \bullet \mathbf{P}_i$$

接下來讓我們探討$\mathbf{T}_k^*$和$\mathbf{E}_l^*$之間的關係，意即推演兩者之間是否具有直交的關係？若$\mathbf{T}_k^*$和$\mathbf{E}_l^*$之間具有直交的關係，則表示在S_T^*或S_E^*內的任何向量都具有直交的關係，亦即S_T^*和S_E^*之間具有直交關係。

$$\left(\mathbf{T}_k^*\right)' \bullet \mathbf{E}_l^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{T}_k'\mathbf{T}\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2}\mathbf{P}_i\right)' \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}_l'\mathbf{E}\mathbf{v}_j}{\|\mathbf{P}_j\|^2}\mathbf{P}_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{T}_k'\mathbf{T}\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2}\right)\left(\frac{\mathbf{E}_l'\mathbf{E}\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2}\right)\mathbf{P}_i'\mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{T}_k'\mathbf{T}\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2}\mathbf{P}_i\right)\left(\frac{\mathbf{E}_l'\mathbf{E}\mathbf{v}_j}{\|\mathbf{P}_j\|^2}\mathbf{P}_j\right)\mathbf{P}_i'\mathbf{P}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{v}_i'\mathbf{T}'\mathbf{T}_k\mathbf{E}_l'\mathbf{E}\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{P}_i\|^2}$$

$$\neq 0 \qquad \#$$

事實上，由$\mathbf{V}'\Sigma_X\mathbf{V} = \mathbf{V}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{V} = \Sigma_P$可得知

$$\lambda_i = \mathbf{v}_i'\mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i'\mathbf{E}'\mathbf{E}\mathbf{v}_i \quad \text{for } i = 1,2,\ldots,n$$

$$0 = \mathbf{v}_i'\mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i'\mathbf{E}'\mathbf{E}\mathbf{v}_j \quad \text{for } i,j = 1,2,\ldots,n \text{ and } i \neq j$$

所以可以確定$\mathbf{T}_k^*$和$\mathbf{E}_l^*$不是直交，亦即S_T^*和S_E^*不是兩個直交的子空間，因此試圖藉由S_T^*和S_E^*來分割S_X的目的是難以如願的，亦即無法透過S_T^*和S_E^*兩個子空間各自的變異數總和，來估計$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$或$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$。

六、信度的最大下限和最小上限

由上述得知估計$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$或$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$所面臨的難題，不過也得知：

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

而且也知道：在S_X中的任何一個向量，其所代表的變異數絕對小於或等於λ_1，而且也大於或等於λ_n。

雖然由上述得知：S_T^*和S_E^*兩個子空間所有變異數的總和可能大於或等於$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$，不過也得知$\mathbf{rank}(S_T^*)$和$\mathbf{rank}(S_E^*)$皆大於或等於 1，而且小於$n$。亦即，$S_T^*$的維度（dimensionality）至少是 1。還有任何一個由一組向量所展開的子空間，若其維度愈少，則其內涵的變異數總和愈小。

整合上述，我們得知：當S_T^*的維度萎縮至 1 時，其內涵的變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$）亦萎縮至最小的範圍。亦即，在$S_X$中，存在某一個向量代表$S_T^*$，而且這個向量所代表變異數小於或等於$\lambda_1$，也大於或等於$\lambda_n$。假若，此時我們

欲求$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$的極大值，亦或將$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$壓縮至最小，則$S_T^*$的內涵變異數總和就是$\lambda_1$。換言之，在真分數變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$）萎縮至最小的情況下，且欲同時將測量誤差變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$）壓縮至最小，則真分數變異數總和應為$\lambda_1$。

在另一方面，當S_T^*的維度擴張至$n-1$時，其內涵的變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$）亦膨脹至最大的範圍。亦即，在$S_X$中，存在有$n-1$個不共面的向量代表$S_T^*$，而且這些向量所代表變異數的總和小於或等於$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i$，也大於或等於$\sum_{i=2}^{n}\lambda_i$。假若，此時我們欲求$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$的極大值，亦或將$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$壓縮至最小，則$S_T^*$的內涵變異數總和就是$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i$。換言之，在真分數變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)$）擴張至最大的情況下，且欲同時將測量誤差變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$）壓縮至最小，則真分數變異數總和應為$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i$。

綜合前述，我們得知：在測量誤差變異數總和（即$\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$）被壓縮至最小的情況下，$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i \geq \sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i) \geq \lambda_1$。

再由前述亦可得知信度公式為

$$\rho^2(T,X)=\frac{\sigma^2(T)}{\sigma^2(X)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(T_i)+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}$$

整合這兩個結果，我們得知：**在測量誤差變異數總和（即 $\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(E_i)$）被壓縮至最小的情況下，**

$$\frac{\lambda_1+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}\leq\rho^2(X,T)\leq\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}$$

根據上式，本研究提議定義測驗信度的**最小上限**（Least Upper Bound；LUB）與**最大下限**（Greatest Lower Bound；GLB）分別為：

$$\text{L.U.B.}\left(\frac{\sigma^2(T)}{\sigma^2(X)}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}$$

以及

$$\text{G.L.B.}\left(\frac{\sigma^2(T)}{\sigma^2(X)}\right)=\frac{\lambda_1+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)+\sum\sum_{i\neq j}\sigma(X_i,X_j)}$$

伍、結論

自從 Cronbach（1951）提出 α 係數以來，甚受古典測驗理論使用者的青睞，成為重要的信度計算方法之一。雖然此係數使用廣泛，但由於 α 係數是一個下限值，使用上會發生不合理的結果，例如：負值的出現等。

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月　37-58 頁

本文根據矩陣代數學的原理，將古典測驗理論信度公式重新推導，獲得一個嶄新的信度估計公式，基本上，根據此公式所求得的信度，確定不會有負值出現的不合理情形。

α 係數提出至今已四十多年，期間歷經許多研究者探討此係數的性質，而探討的方法，不外乎是從資料模擬、數值分析等方面著手，甚少從基本的數理統計學原理來推導，因而產生一些似是而非的結果，這種現象，在國內外的文獻中有時常見。例如，吳瑞屯（民 85）的電腦模擬研究中，基本上即發生數點謬誤之處。包括：

（一）該文假設所有項目分數皆為標準分數，此舉過度簡化古典測驗理論某些公式的推演過程與實質內涵，導致無法詳細研判這些公式的本質，有時甚至導致誤解。該文的公式（5）就是易令讀者忽略 α 係數的本質，誤以為題數（k）的影響是鉅大的。其實：$\dfrac{k}{k-1}\times\dfrac{k(k-1)r}{k+k(k-1)r}=\dfrac{kr}{1+(k-1)r}=\dfrac{kr}{kr+(1-r)}$，所以主要的影響是來自相關係數平均值（$r$），而非題數（$k$），因而該文誇大題數（$k$）影響。

（二）在操弄各項目的變異數的電腦資料模擬過程中，令項目的變異數為 0，在此情形下，項目之間的相關係數是不存在的，但該文卻又操弄項目間的相關係數因子，邏輯上有不誤謬之處。

（三）該文提及「α 係數的計算式中的各項目分數並非使用統一單位的標準分數，因此某些項目測量單位的改變，則勢將影響所得的 α 係數值」。基本上，這種論點有誤，由於 α 係數是一個沒有單位的係數值，只要各項目的測量單位一致，其 α 係數是相同的。並非如該文所說之統一單位的標準分數，才會使得 α 係數不變。

總而言之，本文從矩陣代數學的原理，導出新的信度估計公式，這方面測驗學的理論推演，涉及艱深複雜鉅大工程，但也是促進測驗學發展的基礎。

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月 37-58 頁

參考文獻

吳瑞屯（民 85）：影響α內部一致性係數的因素。中華心理學刊，38（1），51-59。

鄭富森, 許天維, 施淑娟, 施慶麟（民 87）：從向量代數學的觀點探討古典測驗理論，測驗統計年刊，第五輯。

Cronbach, I. J. （1951）. Coefficient alpha and the internal structure of tests. Psychometrika, 16, 297-333.

Allen, M.J., Yen,W.M.(1979).Introduction to measurement theory. Monterey, CA: Brooks /Cole.

Lord,F.M., & Novick ,M.R. (1968). Statistical theories of mental test scores. Reading, MA:Addison - Wesley.

Suen, H.K.(1990). Principles of test theories. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

To Construct the Greatest Lower Bound of Reliability Coefficient Based on Matrix Algebra

Fu-shen Jeng　Hsiang-chuan Liu
Yuan-horng Lin　Bor-chen Kuo　Hsiao-yun Huang
National Taichung Teachers' College

ABSTRACT

The purpose of this study is to calculate the "lower bound" of reliability coefficient according to the principle of matrix algebra. And the value of "lower bound" could be viewed as the reliability coefficient.

Cronbach's α coefficient has been widely used. Basically speaking, α coefficient is also a " lower bound" value. But, the users usually find that α coefficient is negative and this is a unreasonable result. Most importantly, in order to realize the property of α coefficient , the researchers almost used data simulation or numerical method. According to the results, the researchers told what the users must pay attention to about α coefficient . However, the researchers never raised a new method of calculating reliability coefficient.

So, the new "lower bound" of reliability coefficient which is raised by this study can modify the defects of α coefficient. The author also have studied a series of researches about CTT based on matrix algebra. The other results will be published recently.

國立台中師範學院教育測驗評量與統計方法研究發展中心
測驗統計年刊 第五輯 民 86 年 12 月 37-58 頁