多元計分三參數試題選項分析固定效應模式

劉湘川

僑光技術學院金融與風險管理系　　教授

摘要

由於 Thissen & Steinberg(1984) 之 BS 模式中, 亦包含猜測度參數及鑑別度參數與難度參數轉化之斜率參數與截距參數, 自然地會令人誤認爲「BS 模式應爲二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充模式」,Baker(1992) 並進而立式 證明後者爲前者之特例, 本文明確指出兩種模式在處理猜測度參數之方式上, 是截然不同的, 前者任一選項機率模式中之猜測度參數必伴隨增多一反應混合 機率參數之猜測項, 後者則非如此, 並不會增多一反應混合機率參數之猜測項, 亦即; 後者顯然並不能由前者特殊化得到, 換言之, 前者絕對不是後者之擴充模 式。本文進而提出後者之一眞正擴充模式; 如下所示, 該模式參數精簡且名稱具 測驗意義, 並與二元計分三參數對數型試題分析模式呼應一致, 有利於參照比較 分析, 由於每一試題猜測度參數固定, 且與混合機率參數無關, 特稱爲「多元計 分三參數試題選項分析固定效應模式」, 相對地, 稱 BS 模式爲「多元計分三參數 試題選項分析變動效應模式」

$$P_{im}(\theta_s) = \frac{h_{ij}[\exp(a_i d\theta_s + g_{im})] + (1-h_{ij})[(1-c_i)\exp(g_{ij})]}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij})},$$

其中 d 爲常數, 常令 $d = 1.7$,θ_s 表受試者s 能力值參數, $s = 1, 2, \ldots, N$,i 表試題 $i = 1, 2, \ldots, n$, j 表選項, 正確 $j = m$, 誘答 $j = 1, 2, \ldots, (m-1)$, h_{ij} 表取捨指示函數 $j = m$ 時, $h_{ij} = h_{jm} = 1$,$j = 1, 2, \ldots, (m-1)$ 時, $h_{ij} = 0$, a_i, b_i, c_i 分別表試題之鑑別度參數、難度參數、猜測度參數, g_{im} 表試題 i 正答力,g_{ij} 表試題 i 誘答選項 j 之誘答力,$j = 1, 2, \ldots, (m-1)$。

$$\begin{aligned} P_{im} &= \frac{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + c_i \sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij})} \\ &= c_i + (1-c_i)\frac{\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]}{1+\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]}, \\ P_{ij} &= \frac{(1-c_i)\exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{i0}) + \sum_{j=1}^{m}\exp(g_{ij})}, \end{aligned}$$

其中

$$b_i = \frac{\ln \sum_{j=1}^{m-1} \exp(g_{ij}) - g_{im}}{a_i d}, \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, (m-1).$$

關鍵字:BS 模式, 固定效應模式, 正答力, 誘答力, 不變性, 混合機率參數。

第一節　前言

由於客觀性、計分容易、及可快速電腦處理, 因此各種入學主要評定依據之 TOFEL、GRE、GMAT 及學科能力測驗、基本學力測驗、等重要的大型標準測驗, 大多採用選擇題作爲測驗題型。在進行試題分析時, 有關各試題之難度、鑑別度、猜測度、等的 估算, 此前大多採用二元計分三參數對數模式, 進行試題特徵曲線分析。事實上, 選擇題型之作答, 應爲多元類別反應資料, 除了正確選項已有其作答反應特徵曲 線, 而各誘答選項亦當有其專有之作答反應特徵曲線, 因此, 功能擴增之多元計 分選項特徵曲線分析模式, 逐漸應運而生;Bock(1972) 首先擴充 Gumbel(1961) 之 二元計分「試題反應類別特徵曲線 (IRCCC)」, 爲多元計分之模式,Samejima(1979) 繼而將 Bock 之名義反應模式 (Nominal response model) 多引進一固定之猜測值, 此 數爲選項數之倒數,Thissen & Steinberg(1984) 進而將其一般化爲各選項可不盡相 同之猜測度參數,Thissen(1991) 且稱此擴充模式爲 BS 模式 (Bock–Samejima model), 至此, 多元計分選項特徵曲線分析模式似乎已趨完 備,Baker(1992) 並以數式證明;BS 模式可特殊化爲二元計分三參數對數模式, 亦即;BS 模式亦可視爲二元計分三參數對數模式之擴充模式。本文首先強調; 多元計分選項分析模式之功能, 不只是賦予了各誘答選項專有之作答反應特徵曲 線, 且因兼顧了同一試題中諸誘答選項誘答力不盡相同影響之訊息, 強化了其正 確選項試題特徵曲線之充分性及有效性。其次,BS 模式有平移不變所引發之不唯 一確定性, 而有過度參數化問題, 尤其, 參數名稱意旨與原有常見之試題特徵參 數名稱並不一致, 不利於對照分析比較, 基此, 王文中 (民87, 民88) 採用 Rasch 模 式族之名義反應模式 (Nominal response model), 所轉化而得較簡明之誘答模式 (the distractor model), 進行多元計分選項特徵曲線分析, 可估計各選項之難 度與誘答力, 唯在模式中, 鑑別度與猜測度未予考慮而無法估計。最後本文明確 地指出了 BS 模式並非二元計分三參數對數模式之擴充模式, 原因在於兩種模式在 處理猜測度參數之方式上, 是截然不同的, 前者任一選項機率模式中之猜測度參 數必伴隨增多一反應混合機率參數之猜測項, 後者則非如此, 並不會增多一反應 混合機率參數之猜測項, 亦即; 後者顯然並不能由前者特殊化得到, 換言之, 前 者絕對不是後者之擴充模式, 本文進而提出二元計分三參數對數模式之眞正擴充 模式, 此模式參數精簡名稱一致, 有利於系列對照分析比較, 除可估得正確選項 較二元計分模式更爲充分有效之正答力、難度、鑑別度、及猜測度, 並可同時估 得各

誘答選項之誘答力, 是試題分析、改善命題品質、及建立良好等化題庫之更 佳利器, 由於每一試題猜測度參數固定, 且與混合機率參數無關, 特稱爲「多元計 分三參數試題選項分析固定效應模式」, 相對地, 稱 BS 模式爲「多元計分三參數試題 選項分析變動效應模式」。本文先於第二節中簡介既有之「二元計分多參數試題特徵 曲線模式」以便比照分析, 在第三節中將既有之多元計分二參數試題選項分析模式 以本文之固定效應模式表示, 在第四節中本文除提出「二元計分三參數試題特徵曲 線模式」之擴充模式;「多元計分三參數試題選項分析固定效應模式」外, 並證明既 有之「多元計分三參數試題選項分析模式」並非「二元計分三參數試題特徵曲線模式」之擴充模式, 可對照地稱爲「變動效應模式」,「多元計分三參數試題選項分析固定 效應模式」之估計, 則在在第四節中討論, 最後一節爲結語。

第二節　二元計分多參數試題特徵曲線模式簡介

二元計分單參數對數模式 (One-parameter bivariate logistic model) 又稱 Rasch 模式 (Rasch,1960; Wright & Stone,1979; Wright & Wasters,1982), 式中僅有「難 度參數 (difficulty parameter); b_i」, 令 x_{is} 表受試者 s 在第 i 題 的作答反應情形, θ_s 表第 s 位受試者能力參數, 其機率函數如下:

$$P_i(X_{is}=1|\theta_s)=\frac{1}{1+\exp[-1.7(\theta_s-b_i)]}. \tag{1}$$

Rasch 模式只涉及難度參數, 比較簡單容易使用, 且有很好的數理統計性質, 應用 甚廣, 唯其須具「等鑑別力」及「最小猜測」之假定, 常被批評爲不符實際, 故而有 下列二元計分雙參數對數模式、二元計分三參數對數模式、二元計分四參數對數模 式、等二元計分多參數試題特徵曲線模式。

一、二元計分雙參數對數模式 二元計分雙參數對數模式 (Two-parameter bivariate logistic model) 比 Rasch 模 式多一「鑑別度參數 (discrimination parameter); a_i」, 是由美國測驗學 者 A.Birnbaum 修改自 F.M.Lord 的原始雙參數肩型模式 (Normal ogive model) 而 來 (Birnbaum, 1968) 其機率函數如下:

$$P_i(X_{is}=1|\theta_s)=\frac{1}{1+\exp[-1.7a_i(\theta_s-b_i)]}. \tag{2}$$

二、二元計分三參數對數模式 二元計分三參數對數模式 (Three-parameter bivariate logistic model) 比二元計 分雙參數對數模式多了一個「猜測度參數 (guessing parameter); c_i」, 大多 用於選擇題的測驗, 受試者會發生猜題現象 (Birnbaum,

1968; Lord, 1980; Mislevy & Bock, 1990), 其機率函數如下:

$$P_i(X_{is}=1|\theta_s)=c_i+\frac{1-c_i}{1+\exp[-1.7a_i(\theta_s-b_i)]}. \tag{3}$$

三、二元計分四參數對數模式 二元計分四參數對數模式 (Four-parameter bivariate logistic model) 比二元計 分三參數對數模式多一「天井參數 (Ceiling parameter); d_i」, 表示既使能力 值很高, 正確的作答反應機率亦不會達到1.00,(McDonald,1967), 此種模式較不 常使用, 其機率函數如下:

$$P_i(X_{is}=1|\theta_s)=c_i+\frac{d_i-c_i}{1+\exp[-1.7a_i(\theta_s-b_i)]}. \tag{4}$$

第三節　多元計分二參數試題選項分 析固定效應模式

上述三種「二元計分多參數試題特徵曲線模式」及「二元計分單參數試題特徵曲 線模式」均爲二元計分變數 (0或1, 對或錯) 之資料的試題參數分析模式, 其分析 處理方式, 並不將所有選項視爲不同類別, 或視爲多元計分變數之資料, 而是 將所有具有不同誘答力之誘答選項, 全部規併視爲一「錯誤選項」之大類, 成爲 僅有對或錯之二元計分變數資料, 再採用上述「二元計分多參數試題特徵曲線模 式」或「二元計分單參數試題特徵曲線模式」進行試題參數分析, 如此分析之結果, 顯見會損失所有誘答選項中不同誘答力之有關訊息, 所得到的試題參數估計值亦 必然不是充分且有效的估計值, 亦即選擇題型之測驗, 應該考慮以其他更爲充分 有效的非二元計分之試題分析模式來處理, 這是特別值得強調的。

一、二參數二元對數函數類別反應模式及其選項分析固定效應 模式表示法

(一) Gumbel(1961) 首先提出二參數二元對數函數類別反應模式 (Two parameter bivariate logistic category response model), 可應用 於名義記分試題 (Nominally scored item), 其機率函數定義如下:

$$P_{ij}=\frac{\exp(\alpha_j\theta_s+\beta_j)}{\sum_{j=1}^{2}\exp(\alpha_j\theta_s+\beta_j)}. \tag{5}$$

其中 s 表受試者,$s=1,2,\ldots,N$, i 表試題,$i=1,2,\ldots,n$, j 表試題反應類別 $j=1,2$, α_j,β_j 分別表試題 i 反應類別 j 之斜率參數、截距參數且

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\ \beta_1+\beta_2=0$$

當 $j=1$ 時,

$$P_{i1}=\frac{\exp(\alpha_1\theta_s+\beta_1)}{\sum_{j=1}^{2}\exp(\alpha_j\theta_s+\beta_j)}. \tag{6}$$

當 $j=2$ 時,

$$P_{i1}=\frac{\exp(\alpha_2\theta_s+\beta_2)}{\sum_{j=1}^{2}\exp(\alpha_j\theta_s+\beta_j)}. \tag{7}$$

(二) Gumbel 模式與二元計分二參數試題選項分析模式之關係 $j=1$ 時, (5) 或 (6) 式可改寫爲 (8) 式

$$P_{i1}(\theta_s)=\frac{1}{1+\exp[-1.7a_{i1}(\theta_s-b_{i1})]}. \tag{8}$$

其中

$$a_{i1}=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1.7},\quad b_{i1}=\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}.$$

$j=2$ 時, (5) 或 (7) 式可改寫爲 (9) 式

$$P_{i2}(\theta_s)=\frac{1}{1+\exp[-1.7a_{i2}(\theta_s-b_{i2})]}. \tag{9}$$

其中

$$a_{i2}=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1.7}=-a_{i1},\quad b_{i2}=\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}=b_{i1}.$$

可見 (5) 式所表之二參數二元對數函數類別反應模式, 可改寫 爲 (8) 式與 (9) 式之 二「二元計分雙參數對數模式」, 轉化應用至選項分析模式時, 在正常情況下, 若$\alpha_1>\alpha_2$ 時, 則 (8) 式表正確反應之遞增型二元計 分雙參數對數模 式, 而 (9) 式表錯誤反應之遞減型二元計分雙參數對數模式。反之, 若 $\alpha_1<\alpha_2$ 時, 則 (9) 式表正確反應之遞增型二元計分雙參數對 數模式, 而 (8) 式表錯誤反應 之遞減型二元計分雙參數對數模式

(三) 二元計分二參數選項分析固定效應模式表示法 本文將 (5) 式參數轉化可得專有之固定效應模式表示法; 如 (10) 式:

$$P_{ij}(\theta_s)=\frac{h_{ij}\exp(a_1d\theta_s+g_{i2})+(1-h_{ij})\exp(g_{i1})}{\exp(a_id\theta_s+g_{i2})+\exp(g_{i1})}. \tag{10}$$

在此 $j=2$ 恆表正確選項,$j=1$ 恆表錯誤選項, 其中, h_{ij} 爲取捨指示函數, 當 $j=1$ 時;$h_{ij}=0$, 當 $j=2$ 時;$h_{ij}=1$, $d=1.7$,a_i 爲鑑別度參數,g_{i1} 爲誘答力參

數, g_{i2} 爲正答力參數。(10) 式顯然滿足 $P_{i1}(\theta_s)+P_{i2}(\theta_s)=1$ 之條件, $j=1$ 時,

$$\begin{aligned} P_{i1}(\theta_s) &= \frac{\exp(g_{i1})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{i2} + \exp(g_{i1})} \\ &= \frac{1}{1+\exp[a_i d\theta_s + (g_{i2}-g_{i1})]} \\ &= \frac{1}{1+\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]} \\ &= \frac{1}{1+\exp[1.7a_i(\theta_s - b_i)]}. \end{aligned} \tag{11}$$

其中, 難度參數值;

$$b_i = \frac{g_{i1}-g_{i2}}{a_i d}, \tag{12}$$

$j=2$ 時,

$$\begin{aligned} P_{i2}(\theta_s) &= \frac{\exp(a_i d\theta_s + g_{i2})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{i2} + \exp(g_{i1})} \\ &= \frac{1}{1+\exp[-1.7a_i(\theta_s - b_i)]}, \end{aligned} \tag{13}$$

(13) 式爲正確選項特徵曲線模式, 即試題特徵曲線模式, a_i, b_i 分別試題 i 之鑑別度參數、難度參數值,(11) 式爲 錯誤選項特徵曲線模式, 其難度參數值與 (13) 式相同, 但鑑別度參數值與 (13) 式 異號, 另由 (12) 式得知當 $a_i, d=1$ 時,「難度參數值」恰爲「錯 誤選項之誘答力參數值」減去「正確選項之正答力參數值」所得之差值。至此 可知, 本文所提之選項分析固定效應模 式表示法, 不僅可顯示試題分析之擴充性, 並有固定一致之參數名稱 及進一步有意義表達「難度與誘答力減正答力之差爲正變」之關係。

二、二參數多元對數函數類別反應模式及其選項分析固定效應模式表示法

(一) Bock 名義反應模式及其選項分析固定效應模式表示法:

1、Bock 名義反應模式 Bock(1972) 擴展上述 Gumbel 之二參數二元對數函數類別反應模式而得 二參數多元對數函數類別反應模式 (Two-parameter multivariate logistic category response model), 簡稱爲 Bock 名義反應模式 (Bock's nominal response model), 其機率函數定義如下:

$$P_{ij}(\theta_s) = \frac{\exp(\alpha_{ij}\theta_s + \beta_{ij})}{\sum_{k=1}^{m}\exp(\alpha_{ik}\theta_s + \beta_{ik})}. \tag{14}$$

其中 s 表受試者,$s = 1, 2, \ldots, N$,i 表試題,$i = 1, 2, \ldots, n$, j 表試題反應類別 $j = 1, 2, \ldots, m$,α_{ij}, β_{ij} 分 別表反應類別之斜率參數, 截距參數。Bock 強調 (14) 式有 logit 之 平移不變性, 故可強加一線型限制;

$$\sum_{j=1}^{m}(\alpha_{ij}\theta_s) + \beta_{ij}) = 0 \text{ , 而可令 } \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij} = 0,\ \beta_{ij} = 0. \tag{15}$$

※ Bock 於其文中並未說明何謂「logit 平移不變性」, 本文 補加說明如下; (14) 式可改寫爲如下四恆等式;

$$\begin{aligned}
P_{ij}(\theta_s) &= \frac{exp(\alpha'_{ij}\theta_s + \beta'_{ij})}{\sum_{k=1}^{m}\exp(\alpha'_{ik}\theta_s + \beta'_{ik})} \\
&= \frac{\exp[(\alpha'_{ij}\theta_s + \beta'_{ij}) + (\alpha\theta_s + \beta)]}{\sum_{j=1}^{m}\exp[(\alpha'_{ij}\theta_s + \beta'_{ij}) + (\alpha\theta_s + \beta)]} \\
&= \frac{\exp[(\alpha'_{ij} + \alpha)\theta_s + (\beta'_{ij} + \beta)]}{\sum_{k=1}^{m}\exp[(\alpha'_{ik} + \alpha)\theta_s + (\beta'_{ik} + \beta)]} \\
&= \frac{\exp(\alpha_{ij}\theta_s + \beta_{ij})}{\sum_{k=1}^{m}\exp(\alpha_{ik}\theta_s + \beta_{ik})},
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_{ij} = \alpha'_{ij} + \alpha$, $\beta_{ij} = \beta'_{ij} + \beta$ 且

$$\alpha = \frac{-\sum_{j=1}^{m}\alpha'_{ij}}{m},\ \beta = \frac{-\sum_{j=1}^{m}\beta'_{ij}}{m}$$

則有 (15) 之結果 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij} = 0$, $\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij} = 0$。

2、王文中多元計分單參數誘答模式 Wang(1998) 採用 Rasch 模式族之名義反應模式 (Nominal response model), 及 Wilson(1992) 之有序分割模式 (the ordered partitioned model) 的一特例 轉化而得較簡明之誘答模式 (the distractor model) 如 (16) 式;

$$P_{ij}(\theta_s) = \frac{\exp(h_{ij}\theta_s + g_{ij})}{\sum_{k=0}^{m}\exp(h_{ik}\theta_s + g_{ik})}. \tag{16}$$

在此 $j = 0$ 表正確選項 $j = 1, 2, \ldots, m$ 表錯誤選項。其中,h_{ij} 爲取捨指示函數 $h_{i0} = 1$; $h_{ij} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

依據 (15) 式先設定 $g_{i0} = 0$, 以確定並簡化模式, 而未予適當 定義 g_{ij} 同上表試

題 i 錯誤選項 j 之誘答力參數

$$\begin{aligned} P_{i0}(\theta_s) &= \frac{\exp(\theta_s)}{\exp(\theta_s)+\sum_{k=1}^{m}\exp(g_{ik})} \\ &= \frac{1}{1+\exp\{-[\theta_s-\ln\sum_{k=1}^{m}\exp(g_{ik})]\}} \\ &= \frac{1}{1+\exp[-(\theta_s-b_i)]}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中,$b_i=\ln\sum_{k=1}^{m}\exp(g_{ik})$.

$$P_{i0}(\theta_s)=\frac{\exp(g_{ij})}{\exp(\theta_s)+\sum_{k=1}^{m}\exp(g_{ik})},\ j=1,2,\ldots,m. \tag{18}$$

王文中之誘答模式可視爲正答力爲 0 之多元計分單參數選項分析固定效應模 式的特例, 不同處爲其選項數爲 $(m+1)$。

3、Bock 模式之選項分析固定效應模式表示法: 爲利於在選項分析模式之轉化應用, 不失一般性地, 令第m 反應類別 (即 $j=m$) 所對應之選項, 爲正確選項, 其餘所有反應類別所對應之選 項 (即$j=1,2,3,\ldots,m-1$), 均爲錯誤誘答選項, 則 (15) 式可 改寫如下:

$$\alpha_{im}=-\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_{ij},\quad \beta_{im}=-\sum_{j=1}^{m-1}\beta_{ij}. \tag{19}$$

且可將 (14) 式轉化爲本文所提之選項分析固定效應模式表示法 如 (20) 式:

$$P_{ij}(\theta_s)=\frac{h_{ij}\exp(a_id\theta_s+g_{im})+(1-h_{ij})\exp(g_{ij})}{\exp(a_id\theta_s+g_{im})+\sum_{k=1}^{m-1}\exp(g_{ik})}. \tag{20}$$

在此 $j=m$ 恆表正確選項,$j=1,2,\ldots,(m-1)$ 恆表錯誤選項, 其中,h_{ij} 爲指示函數, 當 $j=1,2,\ldots,(m-1)$ 時,$h_{ij}=0$; 當$j=m$ 時;$h_{ij}=1$, $d=1.7$, a_i,b_i 分別爲試題 之鑑別度參數, 難度參數 g_{im} 爲試題 i 正答力參數,g_{ij} 爲 錯誤選項 j 誘答力參數 $j=1,2,\ldots,(m-1)$。(20) 式顯然滿足 $\sum_{j=1}^{m}P_{ij}(\theta_s)=1$ 之條件

$$\begin{aligned} P_{ij}(\theta_s) &= \frac{\exp(a_id\theta_s+g_{im})}{\exp(a_id\theta_s+g_{im})+\sum_{k=1}^{m-1}\exp(g_{ik})} \\ &= \frac{1}{1+\exp\{-a_id\theta_s-[g_{im}-\ ln\sum_{k=1}^{m-1}\exp(g_{ik})]\}} \\ &= \frac{1}{1+\exp[-a_id(\theta_s-b_i)]}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$b_i = \frac{[\ln \sum_{k=1}^{m-1} \exp(g_{ik})] - g_{im}}{a_i d}. \tag{22}$$

$j = 1, 2, \ldots, (m-1)$ 時,

$$P_{ij}(\theta_s) = \frac{\exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{k=1}^{m-1} \exp(g_{ik})}. \tag{23}$$

(21) 式表正確選項試題特徵曲線模式, 與二元計分雙參數對數模式 完全相同, 唯難度參數與誘答力及正答力之關係如 (22) 式所示, 特別 當 $a_i d = 1$ 時,「難度參數值」等於「誘答力參數值尤拉和」減去「正答力參數值」, 然由 (19) 式知 $\sum_{k=1}^{m-1} g_{ik} = -g_{im}$, 即當 正答力參數值確知或爲一定值時, 誘答力參數值和亦恆爲一定值, 但誘答力參 數值尤拉和之值卻會隨著不同之誘答力參數值而異, 因此可知; 選擇題之作答 資料應屬多元計分資料, 若以二元計分資料處理, 相當於將所有不同之誘答選 項併爲一誘答選項進行試題分析, 即恆以定 值「$\sum_{k=1}^{m-1} g_{ik}$」代替可能不同之 值「$\ln \sum_{k=1}^{m-1} g_{ik}$」, 必有 失不同誘答力訊息而折損模式估計靈敏度及有效性。綜合上述論析可知; 本文 所提之多元計分二參數選項分析固定效應模式 (20) 爲二元計分雙參 數對數模式 (8) 之擴充模式, 前者不僅較後者充分有效, 且可同時 估計所有誘答選項之誘答力。

第三節　多元計分三參數試題選項 分析變動效應模式與固定效應模式

一、Samejima 擴張名義反應模式 Samejima(1979) 以混合機率處理方式, 將 Bock 之名義反應模式多引進 一固定之猜測值及猜測項, 由於各選項被隨機選答之機會相同, 故定猜測值 爲選項數之倒數, 而得具猜測值及猜測項之擴張名義反應模式, 其機率函 數定義如 (24) 式:

$$P_{ij}(\theta_s) = \frac{\exp(\alpha_{ij}\theta_s + \beta_{ij}) + \frac{1}{m}\exp(a_{i0}\theta_s + \beta_{i0})}{\sum_{k=0}^{m} \exp(\alpha_{ik}\theta_s + \beta_{ik})}, \tag{24}$$

其中 s 表受試者,$s = 1, 2, \ldots, N$,i 表試題, $i = 1, 2, \ldots, n$,j 表試題反應類別 $j = 1, 2, \ldots, m$, α_{ij}, β_{ij} 分別表試題 i 反應類別 j 之斜率參數、截距參數, α_{i0}, β_{i0} 分別表試題 i 猜測類別之斜率 參數、截距參數。

二、Thissen & Steinberg 之 BS 模式 Thissen & Steinberg(1984) 認爲各選項之猜測度參數可不盡相同, 將 Samejima 擴張名義反應模式一般化, 而得多元計分三參數

試題選項 分析模式 Thissen(1991) 且稱此擴充模式爲 BS 模式 (Bock-Samejima model), 亦即;BS 模式爲以猜測度參數取代 (24) 式中之猜測值而得, 其機率 函數定義如 (25) 式:

$$P_{ij}(\theta_s) = \frac{\exp(\alpha_{ij}\theta_s + \beta_{ij}) + c_{ij}\exp(a_{i0}\theta_s + \beta_{i0})}{\sum_{k=0}^{m}\exp(\alpha_{ik}\theta_s + \beta_{ik})}, \tag{25}$$

其中顯然可知: 若令 $\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(\theta_s) = 1$ 時, 則應有

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = 1. \tag{26}$$

※ 本文補加說明 (25) 實爲 Bock 名義反應 模式 (14) 與猜測 機率 c_{ij} 之混合機率轉化而 得的模式: 令採取 Bock 模式選答策略之機率爲 λ_{ij}, 採取猜 測機率 c_{ij} 選答策略之機 率爲 $(1-\lambda_{ij})$, 則得混合機率爲

$$P_{ij}(\theta_s) = \lambda_{ij}\frac{\exp(\alpha_{ij}\theta_s)}{\sum_{k=1}^{m}\exp(\alpha_{ik}\theta_s + \beta_{ik})} + (1-\lambda_{ij})c_{ij}. \tag{27}$$

令

$$\lambda_{ij} = \frac{\exp(\alpha_{ij}\theta_s + \beta_{ij})}{\exp(\alpha_{i0}\theta_s + \beta_{i0}) + \sum_{k=1}^{m}\exp(\alpha_{ik}\theta_s + \beta_{ik})} + (1-\lambda_{ij})c_{ij}. \tag{28}$$

將 (28) 式代入 (27) 式即得 (25) 式之 BS 模 式。由 (28) 式得知; 當 $\sum_{k=1}^{m}\exp(\alpha_{ij}\theta_s + \beta_{ij})$ 值確定時, 混合 機率參數 λ_{ij} 值由猜測項 $\exp(\alpha_{i0}\theta_s + \beta_{i0})$ 唯一確定, 可視爲混 合機率參數 λ_{ij} 值已併入猜測項 $\exp(\alpha_{i0}\theta_s + \beta_{i0})$ 中。

三、BS 模式並非二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充模式 BS 模式中包含猜測度參數及鑑別度參數與難度參數轉化之斜率參數與截距參 數, 很自然地會認爲「BS 模式應爲二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充 模式」,Baker(1992) 並進而在其專書 (ITEM RESPONSE THEORY) 之 278,279 兩頁 中, 立式證明「BS 模式爲二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充模式」, 事實上, 由本文混合機率之補加說明中, 顯然可知; 當選項數爲 m 時, 在 BS 模 式中之任一選項機率模式均有同樣情況; 不僅多一猜測度參數 c_{ij}, 而且相 伴地多一「反應混合機率參數 λ_{ij} 之猜測項 $\exp(\alpha_{i0}\theta_s + \beta_{i0})$」, 簡言之;「當選項 數爲 m 時,BS 模式中之 任一選項機率模式必有 $(m+1)$ 項」, 雖然 Baker 之數式證明中包含 猜測度參數 c_{ij}, 但是二元計分選項數爲 2, 則其對應之 BS 模式中任一選 項機率模式勢必應有 3 項, 而 Baker 之數式中卻只有兩項, 缺少了反應混 合參數 λ_{ij} 之猜測項 $\exp(\alpha_{i0}\theta_s + \beta_{i0})$, 亦即;Baker 並未眞正證明「BS 模式爲二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充模式」, 倒 是間接暗示了「BS 模式並非二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充模式」。

四、多元計分三參數試題選項分析固定效應模式 BS 模式既然並非二元計分三參數對數型試題分析模式之擴充模式, 爲了便於與 既有之二元計分三參數對數型試題分析模式, 參照比較分析, 本文在此另提「二 元計分三參數對數型試題分析模式之眞正多元計分擴充模式」; 其機率函數定義如 (29) 式:

$$\begin{aligned} P_{ij}(\theta_s) &= \frac{h_{ij}[\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + c_i \sum_{j=1}^{m-1} \exp(g_{ij})] + v_{ij}]}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{j=1}^{m-1} \exp(g_{ij})}, \qquad (29) \\ v_{ij} &= (1-h_{ij})[(1-c_i)\exp(g_{ij}), \end{aligned}$$

其中 d 爲常數, 常令 $d = 1.7$,θ_s 表受試者 s 能力值參數, $s = 1, 2, \ldots, N$,i 表試題 $i = 1, 2, \ldots, n$,j 表選項, 正 確 $j = m$, 誘答 $j = 1, 2, \ldots, (m-1)$,h_{ij} 表取捨指示 函數 $j = m$ 時 $h_{ij} = h_{im} = 1$,$j = 1, 2, \ldots, (m-1)$ 時 $h_{ij} = 0$,a_1, b_i, c_i 分別表試題 i 之鑑別度參數、難度 參數、猜測度參數,g_{im} 表試題 i 正答力, g_{ij} 表試題 i 誘答選項 j 之誘答力 $j = 1, 2, \ldots, (m-1)$。

$$\begin{aligned} P_{im}(\theta_s) &= \frac{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + c_i \sum_{j=1}^{m-1} \exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{j=1}^{m-1} \exp(g_{ij})} \\ &= c_i + (1-c_i)\frac{\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]}{1+\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]}, \qquad (30) \end{aligned}$$

$$P_{ij}(\theta_s) = \frac{(1-c_i)\exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{i0}) + \sum_{j=1}^{m} \exp(g_{ij})}, \qquad (31)$$

其中

$$b_i = \frac{\ln \sum_{j=1}^{m-1} \exp(g_{ij}) - g_{im}}{a_i d},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, (m-1)$$

顯然可知:$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(\theta_s) = 1$.

由 (30) 式之機率恆等式知其確爲二元計分三參數對數型試題分析模式 之擴充模式, 雖然此模式具有測驗意義之五種參數; 鑑別度參數、難度參數、猜測度參數、正答力、及誘答力, 爲便於呼應一致參照分析, 仍稱此擴充模 式爲「多元計分三參數試題分析模式」, 又比較此擴充模式與 BS 模式之差異, 可發覺除了 BS 模式之參數較多且並非均與測驗意義直接有關, 另外擴充模式 (30) 式顯示任一試題只有單純一個猜測度參數, 而 BS 模式則有與 選項同數之猜測度參 數, 且各伴隨一「反應混合機率參數 λ_{ij} 之猜測項 $\exp(\alpha_{i0}\theta_s + \beta_{i0})$」, 爲便於區別, 特稱本文所提之擴充模式爲「多元計分三參數試題分析固定效應模式」, 而相對地 稱 BS 模式爲「多元計 分三參數試題分析變動效應模式」

第五節　結語

Thissen & Steinberg(1984) 之 BS 模式中, 雖然亦包含猜測度參數 及鑑別度參數與難度參數轉化之斜率參數與截距參數, 與常見之「二元 計分三參數對數型試題分析模式」有相當關聯, 且 Baker(1992) 並進而 立式證明後者可由前者特殊化得到, 本文明確指出兩種模式在處理猜測 度參數之方式上, 是截然不同的, 前者猜測度參數必伴隨增多一反應混合 機率參數之猜測項, 後者則非如此, 並不會增多一反應混合機率參數之猜測項, 亦即; 後者顯然並不能由前者特殊化得到, 換言之, 前者絕對不是 後者之擴充模式。本文進而提出後者之眞正擴充模式; 其參數精簡、名稱 具測驗意義、並與二元計分三參數對數型試題分析模式呼應一致, 有利於 參照比較分析, 將成爲試題及選項分析、命題改進、電腦適性測驗、及電 腦適性診斷教學之利器。由於每一試題猜測度參數固定唯一, 且與混合機率 參數無關, 特稱爲「多元計分三參數試題選項分析固定效應模式」, 相對地, 稱 BS 模式爲「多元計分三參數試題選項分析變動效應模式」, 本文亦順便簡介了發展過程中之主要試題選項分析模式及其固定效應模式表示法。

參考文獻

一、中文部分

劉湘川 (民89): 點二系列相關試題鑑別指數之值譜分析及其在 IRT 上之應用。**測驗統計年刊第八輯**。1-22頁。台中市: 國立台中師範學院。

二、外文部分

Baker, Frank B.(1992). *Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques.* New York.

Birnbaum, A.(1968). *Some latent trait models and their users in inferring an examinee's ability.* In Lord, F. M., & Novick, M. R. Statistical theories of mental test scores.(pp. 395-479). Reading, MA: Addison-Wesley.

Bock, R. D.(1972). Estimation item parameters and latent ability when responses are scored in two or more nominal categories. *Psychometrika, 37*, 29-51.

Gumbel, E. J.(1961). Bivariate logistic distribution. *Journal of the American Statistical Association, 56*, 335-349.

Lord, F. M.(1980). *Application of item response theory to practical testing problem.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McDonald, R. P.(1967). Non-linear factor analysis. *Psychometric Monograph, 15.*

Ramsay, J.O.(1991). Kernel smoothing approaches to nonparametric item characteristic curve estimation. *Psychometrika, 56*, 611-630.

Rasch, G.(1960). Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Copenhagen Danmark's Paedogogiske Institute for Educational Research. (Chicago: The University of Chicago Press, 1980).

Samejima, F.(1979). *A new family of models for the multiple choice item.* (Research Report No. 79-4) Knoxville: University of Tennessee, Department of Psychology.

Thissen, D. & Steinberg, L.(1984). A response model for multiple choice items. *Psychometrika, 49*, 501-519.

Thissen, D.(1991). *MULTILOG Version 6 User's Guide.* Mooresville, IN: Scientific Software,Inc.

Wang, W.C.(1998). Rasch analysis of distractors in multiple-choice items. *Journal of Outcome Measurement, 2*, 43-65.

Wilson, M. R.(1992). The ordered partition model: An extension of the partial credit model. *Applied Psychological Measurement, 16*, 309-325.

Wright, B. D.,& Masters, G. N. (1982). *Rating scale analysis.* Chicago: MESA Press.

Wright, B. D.,& Stone, M.H.(1979). *Best test design.* Chicago: MESA Press.

A multivariate logistic response fixed effect model for multiple choice items

Hsiang-Chuan Liu

Abstract

We pointed out that Thissen & Steinberg's BS model is not an extension of the three-parameter logistic ICC model for dichotomous response, Since the mixed probability parameter term was ignored in Baker's discussion. We provided a deferent extended multivariate logistic response model for multiple choice items, It is exactly an extended model of the three-parameter logistic ICC model for dichotomous response, Its probability function is as following:

$$P_{im}(\theta_s) = \frac{h_{ij}[\exp(a_i d\theta_s + g_{im})] + (1-h_{ij})[(1-c_i)\exp(g_{ij})]}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij})},$$

where $d = 1.7$, θ_s: the ability parameter of examinee s, $s = 1, 2, \ldots, N$, i: item i, $i = 1, 2, \ldots, n$, j: option, correct: $j = m$, distract: $j = 1, 2, \ldots, m-1$, h_{ij}: indicate function, $h_{ij} = h_{im} = 1$ if $j = m$, $h_{ij} = 0$ if $j = 1, 2, \ldots, m-1$, a_i, b_j, c_j: discriminating, difficulty, guessing parameter of item i, g_{im}: correct-power of item i, g_{ij}: distractibility of option j item i, $j = 1, 2, \ldots, (m-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} P_{im} &= \frac{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + c_i \sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{im}) + \sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij})} \\ &= c_i + (1-c_i)\frac{\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]}{1+\exp[a_i d(\theta_s - b_i)]}, \\ P_{ij} &= \frac{(1-c_i)\exp(g_{ij})}{\exp(a_i d\theta_s + g_{i0}) + \sum_{j=1}^{m}\exp(g_{ij})}, \end{aligned}$$

where

$$b_i = \frac{\ln\sum_{j=1}^{m-1}\exp(g_{ij}) - g_{im}}{a_i d}, \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, (m-1).$$

Keywords: BS model, fixed effect model, correct-power, distractibility, invariant, mixed probability parameter.