基於ν測度之 Choquet 積分迴歸模式

劉湘川

亞洲大學生物資訊研究所暨心理系

摘要

當欲進行綜合評價之多種屬性間具潛在交互作用時，傳統可加性測度分析方法雖計算方便，常功效不彰，此時應考慮採用模糊測度與模糊積分，常用之模糊測度，有 Sugeno（1974）λ之測度、Zadeh （1978）之 P 測度，劉湘川（2006a）指出 測度不恆存在非可加性測度，P 測度靈敏度不足，劉湘川（2006a, b, c, d）先後提出具靈敏度且恆存在非可加性測度之逐次改進模糊測度；二值m測度、ρ測度、多值m測度，本文指出多值m測度之聯合事件模糊測度之定義未兼顧基本事件測度之一致性，特提出改進之模糊測度，稱為「ν測度」，進而提出基於ν測度之 Choquet 積分迴歸模式，將有利於具潛在交互作用資料之綜合評價與預測分析。

關鍵字：λ測度、P 測度、ν測度、Choquet 積分、Choquet 積分迴歸模式

The Choquet Integral Regression Model Based on ν- Measure

Hsiang-Chuan Liu

Department of Biotechnology & Bioinformatics,
Asia University

Abstract

When interactions among criteria exist in multiple decision-making problems or forecasting problems, the performance of the traditional additive scale method is poor. Non-additive fuzzy measures and fuzzy integral can be applied to improve this situation. The λ-measure (Sugeno, 1974) and P-measure (Zadeh, 1978) are the most often used fuzzy measures, Hsiang-Chuan Liu (2006a) pointed out that the λ-measure does not always exist the solution of non-additive fuzzy measures, and the P-measure has poor sensitivity. Hsiang-Chuan Liu (2006a, b, c, d) has sequentially proposed three improved non-additive fuzzy measures; m-measure, ρ^*-measure, polyvalent m-measure.

This paper pointed out that there are non-consistence between the definitions of measures of joint events and the measures of basic events and empty event in previous three improved non-additive fuzzy measures.

In this paper, the improved non-additive fuzzy measures, ν-measure, with completely consistent measure definitions for all events is proposed and a new Choquet integral regression model based on this ν-measure is also proposed.

Keywords: λ-measure, P-measure, ν-measure, Choquet integral, Choquet integral regression model

壹、前言

當欲進行綜合評價整合計分之多種屬性間具潛在交互作用時，傳統線性可加性測度分析方法雖計算方便，常功效不彰。此時應考慮採用模糊積分，惟在求取 Choquet 積分（Choquet, 1953）或 Sugeno 積分（Sugeno, 1974）之前，必須先選定適當之模糊測度，一般均採用 Sugeno（1974）之λ測度，或 Zadeh（1978） 之 P 測度，劉湘川（2006a）指出λ測度不僅不恆存在非可加性測度解，且不可能存在混合模糊測度解，P 測度不僅靈敏度不足，Zadeh 且只存在次可加性模糊測度解，不會存在超可加性模糊測度及混合模糊測度解，劉湘川（2006a, b, c, d）先後提出具靈敏度且恆存在非可加性測度之逐次改進模糊測度：二值m測度、ρ測度、多值m測度，其中多值m測度不僅恆存在次可加性模糊測度、超可加性模糊測度及混合模糊測度解，且決定模糊測度解之m值，可為任意正值，有無限多可行解可供選擇。本文指出多值m測度之聯合事件模糊測度之定義未兼顧基本事件測度之一致性，特提出改進之模糊測度，稱為「ν測度」，進而提出基於ν測度之 Choquet 積分迴歸模式，將有利於具潛在交互作用資料之綜合評價與預測分析。

本文結構如下：貳、模糊測度與模糊積分之發展契機列入；參、模糊測度之簡介；肆、本文提出之ν測度；伍、Choquet 積分之簡介；陸、基於ν測度之 Choquet 積分迴歸模式；柒、結論。

貳、模糊測度與模糊積分之發展契機

眾所常用之多重決策統計理論，主要建構於嚴謹優美之可加性機率測度理論上，惟當欲進行預測及分類之資料具有潛在交互作用時，傳統可加性測度分析方法雖計算方便，但在實際應用上，情境不盡相符，常有力有未逮及功效不彰之感。這是引發模糊測度與模糊積分之主要發展契機，在此舉一簡例說明如下：

【例 1】假設某國中之畢業成績中，數理學科之科目包含「地球科學」、「生物理化」、「理化」、「數學」，四科之滿分均為 100 分，惟重要度加權計分依授課時數計算依次分別為 0.1 比 0.2 比 0.3 比 0.4，假設某生成績依次分別為 90、80、70、60，則某生數理學科畢業成績之整合學習能力，為 $90\times0.1+80\times0.2+70\times0.3+60\times0.4=70$

然而，若以嚴謹之測度論之觀點檢視上例，則上述四科成績之重要度之直接加權可視為一種可加性計分測度，必須滿足四種學科相互之間無交互作用之基本假設，事實上，這四種學科間多多少少會包含影響整合學習能力之交互作用，可能任二科或三科中均有之相同基本學習能力，會發生重複計算之情形，另外互補整合學習能力則會發生偏低計算之情形，因此引發兩種待解決之測度問題，一為包含單科重要度與多科間交互作用之整合計分問題，另一為交互作用本身之測度問題，這就是模糊測度與模糊積分所須要探討之主要課題。

參、模糊測度簡介

一般常見之 Lebesgue 測度及機率測度，為可加性測度之特例，滿足可加性之測度必滿足單調性，反之不必然，放寬限制，以單調性取代可加性之測度即為

單調性測度，此時可加性之測度即為單調性測度之特例，單調性測度又稱為非可加性測度或模糊測度，其初始概念首先由 Dempster（1967）提出，完備之發展則由 Shafer（1976）提出，Sugeno（1974）提出一具體適用之λ測度，Zadeh（1978）提出計算簡易之 P 測度（Wang & Klir, 1992），劉湘川（2006a, b, c, d）指出λ測度不恆有非可加性模糊測度解，P 測度只存在次可加性模糊測度解且靈敏度不足，並先後提出之改進模糊測度：二值m測度與多值m測度，分別簡介如下：

【定義 1】模糊測度

若$(X,2^X)$為可測空間，且集合函數$g:2^X\to[0,1]$滿足下列條件時，則稱g為$(X,2^X)$上之模糊測度：

1. $g(\phi)=0$，$g(X)=1$　　[正規性（normality）]
2. $\forall A,B\in 2^X$，$A\subseteq B\Rightarrow g(A)\le g(B)$　[單調性（monotonicity）]　（1）

【定義 2】模糊測度之分類

令g為$(X,2^X)$上之模糊測度：

1. 若$\forall A,B\in 2^X$，$A\bigcap B=\phi\ni g(A\bigcup B)=g(A)+g(B)$時，則稱$g$為$(X,2^X)$上之可加性測度（additive measure）。
2. 若$\phi\ne\forall A,B\in 2^X$，$A\bigcap B=\phi$，$A\bigcup B\ne X\ni g(A\bigcup B)>g(A)+g(B)$時，則稱$g$為$(X,2^X)$上之超可加性測度（superadditive measure）。
3. 若$\phi\ne\forall A,B\in 2^X$，$A\bigcap B=\phi$，$A\bigcup B\ne X\ni g(A\bigcup B)<g(A)+g(B)$時，則稱$g$為$(X,2^X)$上之次可加性測度（subadditive measure）。
4. 若g不為可加性測度、超可加性測度及次可加性測度時，稱為混合模糊（mixture fuzzy measure）。

【定義 3】Sugeno（1974）之λ測度

令$\lambda\in(-1,\infty)$，$X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$，$|X|=n\ge 3$，若$(X,2^X)$為可測空間，且若集合函數$g_\lambda:2^X\to[0,1]$滿足下列條件時，則稱g_λ為 Sugenoλ測度，且稱λ值為測度決定係數：

1. $g_\lambda(\phi)=0$，$g_\lambda(X)=1$
2. $\forall A,B\in 2^X$，$A\bigcap B=\phi$，$A\bigcup B\ne X$

$$\Rightarrow g_\lambda(A\bigcup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B) \qquad (2)$$

3. $\prod_{i=1}^{n}[1+\lambda g_\lambda(\{x_i\})]=\lambda+1>0$　（3）

【定理 1】Sugeno（1974）之λ測度唯一解定理

令$\lambda\in(-1,\infty)$，$X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$，$|X|=n\ge 3$，$(X,2^X)$為可測空間，若$g_\lambda:2^X\to[0,1]$為 Sugenoλ測度，則λ值由$\prod_{i=1}^{n}[1+\lambda g_\lambda(\{x_i\})]=\lambda+1>0$唯一決定，並滿足下列條件：

1. $\sum_{i=1}^{n}g_\lambda(\{x_i\})<1\Rightarrow\lambda>0$

2. $\sum_{i=1}^{n} g_\lambda(\{x_i\}) = 1 \Rightarrow \lambda = 0$

3. $\sum_{i=1}^{n} g_\lambda(\{x_i\}) > 1 \Rightarrow -1 < \lambda < 0$

【定義 4】Zadeh（1978）之 P 測度

令 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ，$n \geq 3$ ，若 $(X, 2^X)$ 為可測空間，且若集合函數 $g_P : 2^X \to [0,1]$ 滿足下列條件時，則稱 g_P 為可能性測度（possibility measure），簡稱 P 測度：

1. $g_P(\phi) = 0$ ，$g_P(X) = 1$ （4）
2. $\forall A, B \in 2^X$ ，$A \bigcap B = \phi$ ，$A \bigcup B \neq X \Rightarrow g_P(A \bigcup B) = \max[g_P(A), g_P(B)]$ （5）

【定理 2】Zadeh（1978）之 P 測度解為唯一

令 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ，$n \geq 3$ ，$(X, 2^X)$ 為可測空間，若 $g_P : 2^X \to [0,1]$ 為 P 測度，則 $\forall A \in 2^X \Rightarrow g_P(A)$ 之值為唯一。

【證明】

因為 $\forall A \in 2^X \Rightarrow g_P(A) = \max_{x \in A}[g_P(\{x\})]$，所以 $\forall A \in 2^X \Rightarrow g_P(A)$ 之值顯然為唯一。

【定義 5】劉湘川（2006a）之二值 m 測度

令 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ，$n \geq 3$ ，若 $(X, 2^X)$ 為可測空間，且若集合函數 $g_m : 2^X \to [0,1]$ 滿足下列條件時，則稱 g_m 為二值 m 測度，並簡稱 m 測度：

1. $g_m(\phi) = 0$ ，$g_m(X) = 1$ ，$m = 0,1$ （6）
2. $\max_{x \in X}[g_m(\{x\})] < 1$ （7）
3. $\forall A \subset X$ ，

$$\Rightarrow g_m(A) = \max_{x \in A}[g_m(\{x\})] + \frac{m \sum_{x \in A} g_m(\{x\})}{(n - |A| + 1) \sum_{x \in X} g_m(\{x\})}[1 - \max_{x \in X}[g_m(\{x\})]] \quad (8)$$

【定義 6】劉湘川（2006c）之多值 m 測度

令 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ，$n \geq 3$ ，若 $(X, 2^X)$ 為可測空間，且若集合函數 $g_m : 2^X \to [0,1]$ 滿足下列條件時，則稱 g_m 為多值 m 測度，或廣義 m 測度：

1. $g_m(\phi) = 0$ ，$g_m(X) = 1$ ，$m \in [0, \infty)$ （9）
2. $\max_{x \in X}[g_m(\{x\})] < 1$ （10）
3. $\forall A \subset X$ ，$2 \leq |A| < n$

$$\Rightarrow g_m(A) = \max_{x \in A}[g_m(\{x\})] + \frac{m \sum_{x \in A} g_m(\{x\})}{(n - |A| + 1) \sum_{x \in X} g_m(\{x\})}[1 - \max_{x \in X}[g_m(\{x\})]] \quad (11)$$

【註 1】

1. 若$m=0,1$時，多值m測度即二值m測度。
2. 若$m>0$時，多值m測度之m值可為任意正值，具無限多不同非可加測度解之模糊測度。

【定理 3】若$g_m:2^X\to[0,1]$為多值m測度，則g_m為m之遞增函數。

【證明】

$$0\le m_1\le m_2\Rightarrow$$
$$\frac{m_1\sum_{x\in A}g_m(\{x\})}{(n-|A|+m_1)\sum_{x\in X}g_m(\{x\})}\le\frac{m_2\sum_{x\in A}g_m(\{x\})}{\left(n-|A|+m_2\right)\sum_{x\in X}g_m(\{x\})}\Rightarrow g_{m_1}(A)\le g_{m_2}(A)$$

由（11）得證。

【例 2】同例 1，令基本事件之代號依成績為序表為x_1：地球科學、x_2：生物、x_3：理化，x_4：數學，則其重要度加權 P 測度值為$g(\{x_1\})=0.1$，$g(\{x_2\})=0.2$，$g(\{x_3\})=0.3$，$g(\{x_4\})=0.4$且由模糊測度定義知$g(\phi)=0$，$g(X)=g(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=1$。

1. 由λ測度之定義知聯合事件之λ測度值之求取，

   由 sugeno 公式（3），$\prod_{i=1}^{n}[1+\lambda g_\lambda(\{x_i\})]=\lambda+1>0$，

   可得$[1+0.1\lambda][1+0.2\lambda][1+0.3\lambda][1+0.4\lambda]=\lambda+1>0$，化簡得方程式為

   $$\lambda^2(24\lambda^2+500\lambda+3500)=0 \qquad (12)$$

   顯知只能解得唯一實數解為$\lambda=0$，即表此題明知科目間有交互作用，卻無法求得非可加性測度之λ值，只能考慮傳統之可加性測度。
2. 由 P 測度之定義可求得

$$\begin{aligned}
&g_P(\{x_1,x_2\})=\max[0.1\,,0.2]=0.2\\
&g_P(\{x_1,x_3\})=\max[0.1\,,0.3]\\
&=g_P(\{x_2,x_3\})=\max[0.2\,,0.3]\\
&=g_P(\{x_1,x_2,x_3\})=\max[0.1\,,0.2,0.3]=0.3\\
&g_P(\{x_1,x_4\})=\max[0.1\,,0.4]\\
&=g_P(\{x_2,x_4\})=\max[0.2\,,0.4]\\
&=g_P(\{x_3,x_4\})=\max[0.3\,,0.4]\\
&=g_P(\{x_1,x_2,x_4\})=\max[0.1\,,0.2\,,0.4]\\
&=g_P(\{x_1,x_3.x_4\})=\max[0.1\,,0.3\,,0.4]\\
&=g_P(\{x_2,x_3,x_4\})=\max[0.2\,,0.3\,,0.4]=0.4
\end{aligned}$$

注意：

$$\begin{aligned}
1&=g_P(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=g_P(\{x_1,x_2\}\cup\{x_3,x_4\})\\
&\ne\max\left[g_P(\{x_1,x_2\}),g_P(\{x_3,x_4\})\right]=\max[0.2,0.4]=0.4
\end{aligned} \qquad (13)$$

3. 在m測度中，

當$m=0$時，m測度即 P 測度，為次可加性模糊測度；當$m=1$時，m測度為較靈敏之混合模糊測度。

各聯合事件之m測度值如下：

由m測度之定義可得

$$g_m(\{x_1,x_2\})=\max[0.1\,,0.2]+\frac{1}{3}(0.1+0.2)(1-0.4)=0.26$$

$$g_m(\{x_1,x_3\})=\max[0.1\,,0.3]+\frac{1}{3}(0.1+0.3)(1-0.4)=0.38$$

$$g_m(\{x_2,x_3\})=\max[0.2\,,0.3]+\frac{1}{3}(0.2+0.3)(1-0.4)=0.4$$

$$g_m(\{x_1,x_2,x_3\})=\max[0.1\,,0.2,0.3]=0.3+\frac{1}{2}(0.1+0.2+0.3)(1-0.4)=0.48$$

$$g_m(\{x_1,x_4\})=\max[0.1\,,0.4]+\frac{1}{3}(0.1+0.4)(1-0.4)=0.5=g_m(\{x_1\})+g_m(\{x_4\})$$

$$g_m(\{x_2,x_4\})=\max[0.2\,,0.4]+\frac{1}{3}(0.2+0.4)(1-0.4)=0.52<g_m(\{x_2\})+g_m(\{x_4\})$$

$$g_m(\{x_3,x_4\})=\max[0.2\,,0.4]+\frac{1}{3}(0.3+0.4)(1-0.4)=0.54$$

$$g_m(\{x_1,x_2,x_4\})=\max[0.1\,,0.2\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.1+0.2+0.4)(1-0.4)=0.61$$

$$g_m(\{x_1,x_3,x_4\})=\max[0.1\,,0.3\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.1+0.3+0.4)(1-0.4)=0.64$$

$$g_m(\{x_2,x_3,x_4\})=\max[0.2\,,0.3\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.2+0.3+0.4)(1-0.4)=0.67$$

4. 在多值m測度中，

當$m=0,1$時，多值m測度即m測度，m亦可為異於 0 與 1 之任意正值，在此僅舉$m=2$為例考慮各聯合事件之m測度值如下：

由多值m測度之定義，且$m=2$，可得

$$g_m(\{x_1,x_2\})=\max[0.1\,,0.2]+\frac{1}{2}(0.1+0.2)(1-0.4)=0.29$$

$$g_m(\{x_1,x_3\})=\max[0.1\,,0.3]+\frac{1}{2}(0.1+0.3)(1-0.4)=0.42$$

$$g_m(\{x_2,x_3\})=\max[0.2\,,0.3]+\frac{1}{2}(0.2+0.3)(1-0.4)=0.45$$

$$g_m(\{x_1,x_2,x_3\})=\max[0.1\,,0.2\,,0.3]=0.3+\frac{2}{3}(0.1+0.2+0.3)(1-0.4)=0.54$$

$$g_m(\{x_1,x_4\})=\max[0.1\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.1+0.4)(1-0.4)=0.55>g_m(\{x_1\})+g_m(\{x_4\})$$

$$g_m(\{x_2,x_4\})=\max\left[0.2\,,0.4\right]+\frac{1}{2}(0.2+0.4)(1-0.4)=0.58<g_m(\{x_2\})+g_m(\{x_4\})$$

$$g_m(\{x_3,x_4\})=\max\left[0.3\,,0.4\right]+\frac{1}{2}(0.3+0.4)(1-0.4)=0.61$$

$$g_m(\{x_1,x_2,x_4\})=\max[0.1\,,0.2\,,0.4]+\frac{2}{3}(0.1+0.2+0.4)(1-0.4)=0.68$$

$$g_m(\{x_1,x_3,x_4\})=\max[0.1\,,0.3\,,0.4]+\frac{2}{3}(0.1+0.3+0.4)(1-0.4)=0.72$$

$$g_m(\{x_2,x_3,x_4\})=\max[0.2\,,0.3\,,0.4]+\frac{2}{3}(0.2+0.3+0.4)(1-0.4)=0.76$$

【註 2】

例 2 顯示，λ測度不恆存在非可加性測度解，P 測度恆有非可加性測度解但不靈敏，在m測度中，當$m=0$時，m測度即 P 測度，當$m=1$時，不同聯合事件之m測度值均不相同，相對於 p 測度為較靈敏之模糊測度。在多值m測度中，當$m=0,1$時，多值m測度即m測度，但多值m測度之測度決定值m可為異於 0 與 1 之任何正值，有無限多非可加模糊測度可供選擇。

肆、ν測度

關於全事件 X 之測度值一致性考慮，劉湘川（2006a）指出 Zadeh（1978）P 測度之聯合事件之測度值以公式（2）與（3）分兩段定義之，關於全事件 X 之測度值有不一致處，即

$$A\bigcap B=\phi\text{，}A\bigcup B=X\Rightarrow 1=g_P(X)=g_P(A\bigcup B)\neq\max[g_P(A),g_P(B)]<1$$

劉湘川（2006a）之m測度與劉湘川（2006c）之多值m測度，則無關於全事件 X 之測度值不一致問題。在m測度中，若$m=1$，$A=X$，$|A|=|X|=n$時，則可得

$$1=g_m(X)=\max_{x\in X}[g_m(\{x\})]+\frac{1\sum_{x\in X}g_m(\{x\})}{(n-|X|+1)\sum_{x\in X}g_m(\{x\})}[1-\max_{x\in X}[g_m(\{x\})]]=1$$

在多值m測度中，若$m>0$，$A=X$，$|A|=|X|=n$時，則亦可得

$$1=g_m(X)=\max_{x\in X}[g_m(\{x\})]+\frac{m\sum_{x\in X}g_m(\{x\})}{(n-|X|+m)\sum_{x\in X}g_m(\{x\})}[1-\max_{x\in X}[g_m(\{x\})]]=1$$

如今進而考慮關於各基本事件之測度值一致性問題，發覺劉湘川（2006a, b）之m測度與多值m測度關於各基本事件之測度值，並不能由聯合事件測度值之決定公式（8）與（11）同時決定之，亦即m測度與多值m測度仍有不一致性問題，均可視為一致性不完備之模糊測度，本文特在此提出關於空事件、各基本事件及全事件之測度值均滿足一致性之完備化模糊測度ν測度，如下：

【定義 7】ν測度

令 $X=\{x_1,x_2,...,x_n\},n\geq 3$，若 $(X,2^X)$ 為可測空間，且若集合函數 $g_\upsilon:2^X\rightarrow[0,1]$ 滿足下列條件時，則稱g_ν為ν測度：

1. $g_\nu(\phi)=0$，$g_\nu(X)=1$，$\nu\in[0,\infty)$　（14）
2. $\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]<1$　（15）

3. $\forall A \subset X, n-|A|+(|A|-1)\nu > 0$

$$\Rightarrow g_\nu(A) = \max_{x\in A}[g_\nu(\{x\})] + \frac{(|A|-1)\nu\sum_{x\in A} g_\nu(\{x\})}{[n-|A|+(|A|-1)\nu]\sum_{x\in X} g_\nu(\{x\})}[1-\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]] \quad (16)$$

【定理 4】ν測度滿足正規性、單調性、及完備一致性

【證明】

1. 當$\nu > 0$時，因為$\forall A \subset X$，且

$$0 \le |A| \le |X| = n \text{，} 0 \le \sum_{x\in A} g_\upsilon(\{x\}) \le \sum_{x\in X} g_\upsilon(\{x\})$$

$$\text{易得 } 0 \le \frac{(|A|-1)\nu\sum_{x\in A} g_\nu(\{x\})}{[n-|A|+(|A|-1)\nu]\sum_{x\in X} g_\nu(\{x\})} \le 1$$

顯知$\forall A \subset X \Rightarrow 0 \le g_\nu(A) \le 1$，即$\nu$測度滿足正規性。

2. 當$\nu > 0$時，若$\forall A \subset B \subset X$，$|A| \le |B| \le |X| = n$，易知

$\max_{x\in A}[g_\upsilon(\{x\})] \le \max_{x\in B}[g_\upsilon(\{x\})]$，$0 \le \sum_{x\in A} g_\upsilon(\{x\}) \le \sum_{x\in X} g_\upsilon(\{x\})$，$(|A|-1) \le (|B|-1)$，

$$n-|B| \le n-|A|$$

$$\Rightarrow (|A|-1)\nu[n-|B|] \le (|B|-1)\nu[n-|A|]$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{(|A|-1)\nu}{[n-|A|+(|A|-1)\nu]} \le \frac{(|B|-1)\nu}{[n-|B|+(|B|-1)\nu]} \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{(|A|-1)\nu\sum_{x\in A} g_\nu(\{x\})}{[n-|A|+(|A|-1)\nu]\sum_{x\in X} g_\nu(\{x\})} \le \frac{(|B|-1)\nu\sum_{x\in A} g_\nu(\{x\})}{[n-|B|+(|B|-1)\nu]\sum_{x\in X} g_\nu(\{x\})} \le 1$$

即ν測度滿足單調性。

3. 當$\nu > 0$時，若$A = \phi \Rightarrow |A| = 0$，$(n-|A|) > 0$，易得

$$\max_{x\in\phi}[g_\nu(\{x\})] = \sum_{x\in\phi} g_\nu(\{x\}) = 0$$

由（16）知，

$$\Rightarrow g_\nu(\phi) = \max_{x\in\phi}[g_\nu(\{x\})] + \frac{(0-1)\nu\sum_{x\in\phi} g_\nu(\{x\})}{[n-|\phi|+(|\phi|-1)\nu]\sum_{x\in X} g_\nu(\{x\})}[1-\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]]$$

$$= 0$$

若$\forall x \in X, A = \{x\}$，$|A| = 1 \Rightarrow |A|-1 = 0$

$$\Rightarrow g_\nu(A) = \max_{x\in A}[g_\nu(\{x\})] + \frac{(|A|-1)\nu\sum_{x\in\phi} g_\nu(\{x\})}{[n-|A|+(|A|-1)\nu]\sum_{x\in X} g_\nu(\{x\})}[1-\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]]$$

$$= \max_{x\in A}[g_\nu(\{x\})] = g_\nu(\{x\})$$

若$A = X$，$|A| = |X| = n$，則

$$\Rightarrow g_\nu(X)=$$

$$\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]+\frac{(|X|-1)\nu\sum_{x\in X}g_\nu(\{x\})}{[n-|X|+(|X|-1)\nu]\sum_{x\in X}g_\nu(\{x\})}[1-\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]]$$

$$=\max_{x\in A}[g_\nu(\{x\})]+[1-\max_{x\in X}[g_\nu(\{x\})]]=1$$

即ν測度滿足完備一致性。

【定理 5】若$g_\nu:2^X\to[0,1]$為ν測度，則g_ν為ν之遞增函數。
【證明】同定理 3。

【例 3】同例 1，考慮各事件之ν測度，令基本事件之代號依成績為序表為x_1：數學、x_2：理化、x_3：生物，x_4：地球科學，則其重要度加權ν測度值為$g_\nu(\{x_1\})=0.1$，$g_\nu(\{x_2\})=0.2$，$g_\nu(\{x_3\})=0.3$，$g_\nu(\{x_4\})=0.4$且有$g_\nu(\phi)=0$，$g_\nu(X)=g_\nu(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=1$，各聯合事件之$\nu$測度值由決定公式(16)可得如下：$\nu$可為 0 及任意正值，在此僅舉$\nu=0,1,2$為說明例。

1. $\nu=0$時，ν測度即 P 測度，同例 2 所示。
2. $\nu=1$時，各聯合事件之ν測度值如下：

$$g_1(\{x_1,x_2\})=\max[0.1\,,0.2]+\frac{1}{3}(0.1+0.2)(1-0.4)=0.26$$

$$g_1(\{x_1,x_3\})=\max[0.1\,,0.3]+\frac{1}{3}(0.1+0.3)(1-0.4)=0.38$$

$$g_1(\{x_2,x_3\})=\max[0.2\,,0.3]+\frac{1}{3}(0.2+0.3)(1-0.4)=0.4$$

$$g_1(\{x_1,x_2,x_3\})=\max[0.1\,,0.2,0.3]=0.3+\frac{2}{3}(0.1+0.2+0.3)(1-0.4)=0.54$$

$$g_1(\{x_1,x_4\})=\max[0.1\,,0.4]+\frac{1}{3}(0.1+0.4)(1-0.4)=0.5=g_1(\{x_1\})+g_1(\{x_4\})$$

$$g_1(\{x_2,x_4\})=\max[0.2\,,0.4]+\frac{1}{3}(0.2+0.4)(1-0.4)=0.52<g_1(\{x_2\})+g_1(\{x_4\})$$

$$g_1(\{x_3,x_4\})=\max[0.3\,,0.4]+\frac{1}{3}(0.3+0.4)(1-0.4)=0.54<g_1(\{x_3\})+g_1(\{x_4\})$$

$$g_1(\{x_1,x_2,x_4\})=\max[0.1\,,0.2\,,0.4]+\frac{2}{3}(0.1+0.2+0.4)(1-0.4)=0.68$$

$$g_1(\{x_1,x_3.x_4\})=\max[0.1\,,0.3\,,0.4]+\frac{2}{3}(0.1+0.3+0.4)(1-0.4)=0.72$$

$$g_1(\{x_2,x_3,x_4\})=\max[0.2\,,0.3\,,0.4]+\frac{2}{3}(0.2+0.3+0.4)(1-0.4)=0.76$$

3. $\nu=2$時，各聯合事件可得較高之測度值如下：

$$g_2(\{x_1,x_2\})=\max[0.1\,,0.2]+\frac{1}{2}(0.1+0.2)(1-0.4)=0.29>g_1(\{x_1,x_2\})=0.26$$

$$g_2(\{x_1,x_3\})=\max[0.1\,,0.3]+\frac{1}{2}(0.1+0.3)(1-0.4)=0.42>g_1(\{x_1,x_3\})=0.38$$

$$g_2(\{x_2,x_3\})=\max[0.2\,,0.3]+\frac{1}{2}(0.2+0.3)(1-0.4)=0.45>g_1(\{x_2,x_3\})=0.4$$

$$g_2(\{x_1,x_2,x_3\})=\max[0.1\,,0.2,0.3]=0.3+\frac{4}{5}(0.1+0.2+0.3)(1-0.4)=0.548$$
$$>g_1(\{x_1,x_2,x_3\})=0.54$$

$$g_2(\{x_1,x_4\})=\max[0.1\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.1+0.4)(1-0.4)=0.55>g_1(\{x_1,x_4\})=0.5$$

$$g_2(\{x_2,x_4\})=\max[0.2\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.2+0.4)(1-0.4)=0.58>g_1(\{x_2,x_4\})=0.52$$

$$g_2(\{x_3,x_4\})=\max[0.3\,,0.4]+\frac{1}{2}(0.3+0.4)(1-0.4)=0.61>g_1(\{x_3,x_4\})=0.54$$

$$g_2(\{x_1,x_2,x_4\})=\max[0.1\,,0.2\,,0.4]+\frac{4}{5}(0.1+0.2+0.4)(1-0.4)=0.736$$
$$>g_1\left(\{x_1,x_2,x_4\}\right)=0.68$$

$$g_2(\{x_1,x_3.x_4\})=\max[0.1\,,0.3\,,0.4]+\frac{4}{5}(0.1+0.3+0.4)(1-0.4)=0.784$$
$$>g_1(\{x_1,x_3.x_4\})=0.72$$

$$g_2(\{x_2,x_3,x_4\})=\max[0.2\,,0.3\,,0.4]+\frac{4}{5}(0.2+0.3+0.4)(1-0.4)=0.832$$
$$>g_1(\{x_2,x_3,x_4\})=0.76$$

伍、Choquet 積分簡介

只要正規單調測度或模糊測度事前選定，則可進而求取模糊積分值，Choquet（1953）最早提出模糊積分，稱為 Choquet 積分，Sugeno（1974）亦提出其專有之模糊積分，稱為 Sugano 積分，劉湘川（2006a, b）指出 Sugeno 積分不能視為常用可加積分之推廣，且只能處理重要度模糊測度值及得分可測函數值均須經正規化，故本文只考慮 Choquet 積分，其定義如下：

【定義 8】Choquet 積分

令集合函數 $g:2^X\to[0,1]$ 為可測空間 $(X,2^X)$ 上之一模糊測度，$h:X\to[0,1]$ 為 X 上之一可測函數，若 $h(x_1)\le h(x_2)\le\ldots\le h(x_n)$，$A_i=\{x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\}$，令

$$C_g(h)\overset{def}{=}\int hdg\overset{def}{=}h(x_1)g(A_1)+\sum_{i=2}^{n}(h(x_i)-h(x_{i-1}))g(A_i)\text{，}$$

則稱 $C_g(h)\overset{def}{=}\int hdg$ 為可測函數 h 關於模糊測度 g 之 Choquet 積分值，求取 Choquet 積分值之過程，稱為 Choquet 積分。

【定理 6】Choquet 積分之性質

$$h(x_1)\le h(x_2)\le\ldots\le h(x_n),A_i=\{x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\}\text{，}$$

$$g(A_i)=g(x_i,x_{i+1},...,x_n)=\sum_{k=i}^{n}g(x_k),i=1,2,...,n$$

$$\Rightarrow C_g(h)=h(x_1)g(A_1)+\sum_{i=2}^{n}(h(x_i)-h(x_{i-1}))g(x_i,x_{i+1},...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[h(x_i)g(x_i)\right]$$

【註 3】

定理 6 指出若模糊測度為正規可加時，Choquet 積分值即為$h(x_1)$，$h(x_2)$，⋯，$h(x_n)$以$g(x_1)$，$g(x_2)$，⋯，$g(x_n)$為加權值之加權平均，即表 Choquet 積分為常用可加積分之推廣。

【例 3】同例 2，已知$h(x_1)=60$，$h(x_2)=70$，$h(x_3)=80$，$h(x_4)=90$，在此僅以ν測度為例簡介 Choquet 積分如下：

ν測度之基本事件重要度加權測度值為$g_\nu(\{x_1\})=0.1$，$g_\nu(\{x_2\})=0.2$，$g_\nu(\{x_3\})=0.3$，$g_\nu(\{x_4\})=0.4$，且知$g_\nu(\phi)=0$，$g_\nu(X)=g_\nu(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=1$

1. $\nu=0$時，ν測度即 P 測度，主要有關聯合事件之 P 測度值如下：

   得$g_P(A_1)=g_P(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=1$，$g_P(A_2)=g_P(\{x_2,x_3,x_4\})=0.4$，

   $g_P(A_3)=g_P(\{x_3,x_4\})=0.4$，$g_P(A_4)=g_P(\{x_4\})=0.4$

   得 Choquet 積分值如下：

$$\begin{aligned}C_p(h)&=h(x_1)g_p(A_1)+(h(x_2)-h(x_1))g_p(A_2)+(h(x_3)-h(x_2))g_p(A_3)\\&\quad+(h(x_4)-h(x_3))g_p(A_4)\\&=60\times1+(70-60)\times0.4+(80-70)\times0.4+(90-80)\times0.4=72\end{aligned}$$

2. $\nu=1$時，由例 3 得主要有關聯合事件之ν測度值如下：

   得$g_\nu(A_1)=g_\nu(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=1$，$g_\nu(A_2)=g_\nu(\{x_2,x_3,x_4\})=0.76$，

   $g_\nu(A_3)=g_\nu(\{x_3,x_4\})=0.54$，$g_\nu(A_4)=g_\nu(\{x_4\})=0.4$，

   得 Choquet 積分值如下：

$$\begin{aligned}C_\nu(h)&=h(x_1)g_\nu(A_1)+(h(x_2)-h(x_1))g_\nu(A_2)+(h(x_3)-h(x_2))g_\nu(A_3)\\&\quad+(h(x_4)-h(x_3))g_\nu(A_4)\\&=60\times1+(70-60)\times0.76+(80-70)\times0.54+(90-80)\times0.4=77\end{aligned}$$

3. $\nu=2$時，由例 3 得主要有關聯合事件之ν測度值如下：

   得$g_\nu(A_1)=g_\nu(\{x_1,x_2,x_3,x_4\})=1$，$g_\nu(A_2)=g_\nu(\{x_2,x_3,x_4\})=0.832$，

   $g_\nu(A_3)=g_\nu(\{x_3,x_4\})=0.61$，$g_\nu(A_4)=g_\nu(\{x_4\})=0.4$

   得 Choquet 積分值如下：

$$\begin{aligned}C_\nu(h)&=h(x_1)g_\nu(A_1)+(h(x_2)-h(x_1))g_\nu(A_2)+(h(x_3)-h(x_2))g_\nu(A_3)\\&\quad+(h(x_4)-h(x_3))g_\nu(A_4)\\&=60\times1+(70-60)\times0.832+(80-70)\times0.61+(90-80)\times0.4=78.42\end{aligned}$$

陸、基於ν測度之 Choquet 積分迴歸模式

劉湘川（2006c）提出基於模糊測度之 Choquet 積分迴歸模式，針對不同模糊測度可得基於該模糊測度之 Choquet 積分迴歸模式，定義如下所列：

【定義 9】基於模糊測度 g 之 Choquet 積分迴歸模式

1. 令集合函數 $g:2^X \to [0,1]$ 為可測空間 $(X,2^X)$ 上之一模糊測度。
2. $h_i : X \to [0,1]$ 為 X 上關於受試 i 之一可測函數，滿足

$$h_i(x_1) \le h_i(x_2) \le \ldots \le h_i(x_n) \text{，} A_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \text{，} i = 1,2,\ldots,N$$

3. 令 y_i，$i = 1,2,\ldots,N$ 為受試 i 之應變數 y 之得分。
4. 若 $\int h_i dg \overset{def}{=} h_i(x_1)g(A_1) + \sum_{j=2}^{n}(h_i(x_j) - h_i(x_{j-1}))g(A_j)$ 為可測函數 h_i 基於模糊測度 g 之 Choquet 積分，則稱 $y_i = \alpha + \beta\int h_i dg + e_i$，$e_i \sim N(0,\sigma^2)$，$i = 1,2,\ldots,N$ 為可測函數 h_i 基於於模糊測度 g 之 Choquet 積分迴歸模式（Choquet integral regression model），簡稱為 Choquet 積分迴歸模式。

【註 4】

基於模糊測度 g 之 Choquet 積分迴歸模式，若模糊測度 g 為 λ 測度，則為基於 λ 測度之 Choquet 積分迴歸模式，若模糊測度 g 為 P 測度，則為基於 P 測度之 Choquet 積分迴歸模式，若模糊測度 g 為 m 測度，則為基於 m 測度之 Choquet 積分迴歸模，若模糊測度 g 為多值 m 測度，則為基於多值 m 測度之 Choquet 積分迴歸模式。

【定義 10】基於ν測度之最適 Choquet 積分迴歸模式

若 $\forall \nu \in [0,\infty)$，$y_i = \alpha + \beta\int h_i dg_\nu + e_i$，$e_i \sim N(0,\sigma^2)$，$i = 1,2,\ldots,N$，為基於$\nu$測度之 Choquet 積分迴歸模式，且 $\nu^* = \arg\min_{\nu\in[o,\infty)}[\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\int h_i dg_\nu)^2]$，

則稱 $\hat{y}_i = \hat{\alpha}^* + \hat{\beta}^*\int h_i dg_{\nu^*}$，$i = 1,2,\ldots,N$ 為基於ν測度之最適 Choquet 積分迴歸方程，其中

$$\hat{\beta}^* = S_{yh} / S_{hh} \text{，} \hat{\alpha}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \hat{\beta}^*$$

$$S_{hy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i][\int h_i dg_{\nu^*} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int h_k dg_{\nu^*}]}{N-1}$$

$$S_{hh} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[\int h_i dg_{\nu^*} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int h_k dg_{\nu^*}]^2}{N-1}$$

柒、結論

當欲進行綜合評價之多種屬性間具潛在交互作用時，傳統可加性測度分析方法雖計算方便，常功效不彰，此時應考慮採用模糊測度與模糊積分，常用之模糊測度，有 Sugeno（1974）之λ測度、Zadeh（1978）之 P 測度，劉湘川（2006a）指出λ測度不恆存在非可加性測度，P 測度靈敏度不足，劉湘川（2006a, b, c, d）先後提出具靈敏度且恆存在非可加性測度之逐次改進模糊測度：二值 m 測度、ρ 測度、多值 m 測度。翁惟盛、張凱怡、林文質、劉湘川（2006）以 2005 年苗栗某私立中學國中部具交互作用之三種自然科畢業成績預測國中基本學力測驗自

然科成績之資料為例，採交互驗證法進行實証研究，結果指出基於λ測度、P 測度，二值m測度、多值m測度，四種模糊測度之 Choquet 積分迴歸模式均可改進傳統複迴歸模式之預測效力；且其中基於多值m測度之 Choquet 積分迴歸模式具最佳表現，本文簡要地回顧了上述四種模糊測度及與 Choquet 積分結合發展之非線性複迴歸模式，進而指出多值m測度之聯合事件模糊測度之定義未兼顧基本事件測度之一致性，特提出改進之完備一致性模糊測度，稱為「ν測度」，進而提出基於ν測度之最適 Choquet 積分迴歸模式，將更有利於具潛在交互作用資料之綜合評價與預測分析。有關ν測度之進一步實證研究及程式應用，限於篇幅，將另文發表。

參考文獻

中文部分

翁惟盛、張凱怡、林文質、劉湘川（2006）。**不同模糊測度 Choquet 積分迴歸模式之比較**。第七屆海峽兩岸心理與教育測驗學術研討會。2006 年 10 月 29 日。臺北市。國立政治大學。

劉湘川（2006a）。基於 P 測度之改進模糊測度及其模糊積分。**測驗統計年刊，14**，1-14。

劉湘川（2006b）。λ測度之改進模糊測度及其模糊積分。**測驗統計年刊，14**，15-28。

劉湘川（2006c）。**廣義m測度之模糊積分及其在測驗整合計分之應用**。第三屆測量統計方法學學術研討會暨台灣統計方法學學會年會。2006 年 9 月 23 日。嘉義市。國立嘉義教育大學。

劉湘川（2006d）。**基於多值m測度之 Choquet 積分迴歸模式**。第七屆海峽兩岸心理與教育測驗學術研討會。2006 年 10 月 29 日。臺北市。國立政治大學。

英文部分

Choquet, G. (1953). Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier, 5,* 131-295.

Dempster, A. P. (1967). Upper and lower probabilities induced by multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics, 38,* 325-339.

Shafer, G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Sugeno, M. (1974). *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.

Wang, Z. & Klir, G. J. (1992) *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York.

Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems, 1,* 3-28.